

Rayonnement

1. Généralités

Tous les corps solides, liquides ou gazeux, émettent un rayonnement de nature électromagnétique. Cette *émission* d'énergie s'effectue au détriment de leur énergie interne ; pour le thermicien, il s'agit d'un *flux* de chaleur émis par le corps considéré.

Ce rayonnement n'est pas monochromatique ; il est composé de radiations de *longueurs d'onde* différentes (disons de $0,3 \mu\text{m}$ à $100 \mu\text{m}$) donnant des spectres continus dans le cas des solides et des spectres de bandes dans le cas de certains gaz [$1 \text{ micron} (1 \mu\text{m}) = 10^{-6} \text{ m}$]. Son intensité dépend de la température du corps.

La *propagation* de ce rayonnement s'effectue dans le vide en ligne droite et avec la célérité de la lumière, sans aucune diminution de l'énergie transportée ; on dit, de ce fait, que le vide est un milieu parfaitement transparent [célérité de la lumière : $c \approx 3.10^8 \text{ m/s}$].

La plupart des gaz simples sont aussi des milieux parfaitement transparents ($\text{O}_2 - \text{N}_2 - \text{H}_2$).

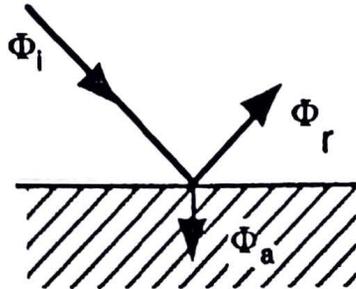
Certains gaz composés (en particulier $\text{CO}_2 - \text{H}_2\text{O} - \text{CO} - \text{CH}_4$) sont, en revanche, dits "*partiellement transparents*", car la propagation s'accompagne d'une diminution de l'énergie transportée, ce qui accroît d'autant l'énergie interne du gaz traversé ; certains liquides et solides (plastiques - verres) entrent également dans cette catégorie.

La grande majorité des liquides et solides sont dits "*opaques*" car ils arrêtent la lumière .

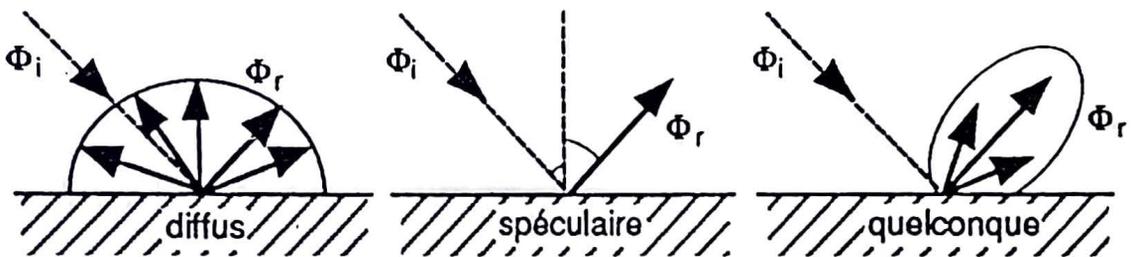
Ajoutons que, du point de vue de l'émission, on distinguera :

- le rayonnement des corps opaques qui provient de leur seule surface ;
- le rayonnement des corps partiellement transparents qui provient de toute leur masse (les corps parfaitement transparents n'émettant aucun rayonnement).

Un rayonnement incident Φ_i , qui arrive sur un corps opaque, est en partie *réfléchi* (Φ_r) et le reste est *absorbé* (Φ_a) sous forme de chaleur au voisinage de l'impact.

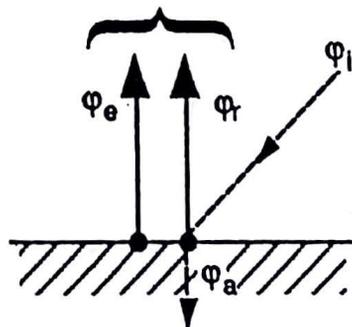


Comme en optique, la réflexion peut être "diffuse" (Φ_r dans toutes les directions) ou "spéculaire" (Φ_r dans la direction symétrique de Φ_i), ou quelconque.



Ainsi, lorsqu'on étudie l'équilibre thermique d'un système, tout corps doit être considéré d'un double point de vue :

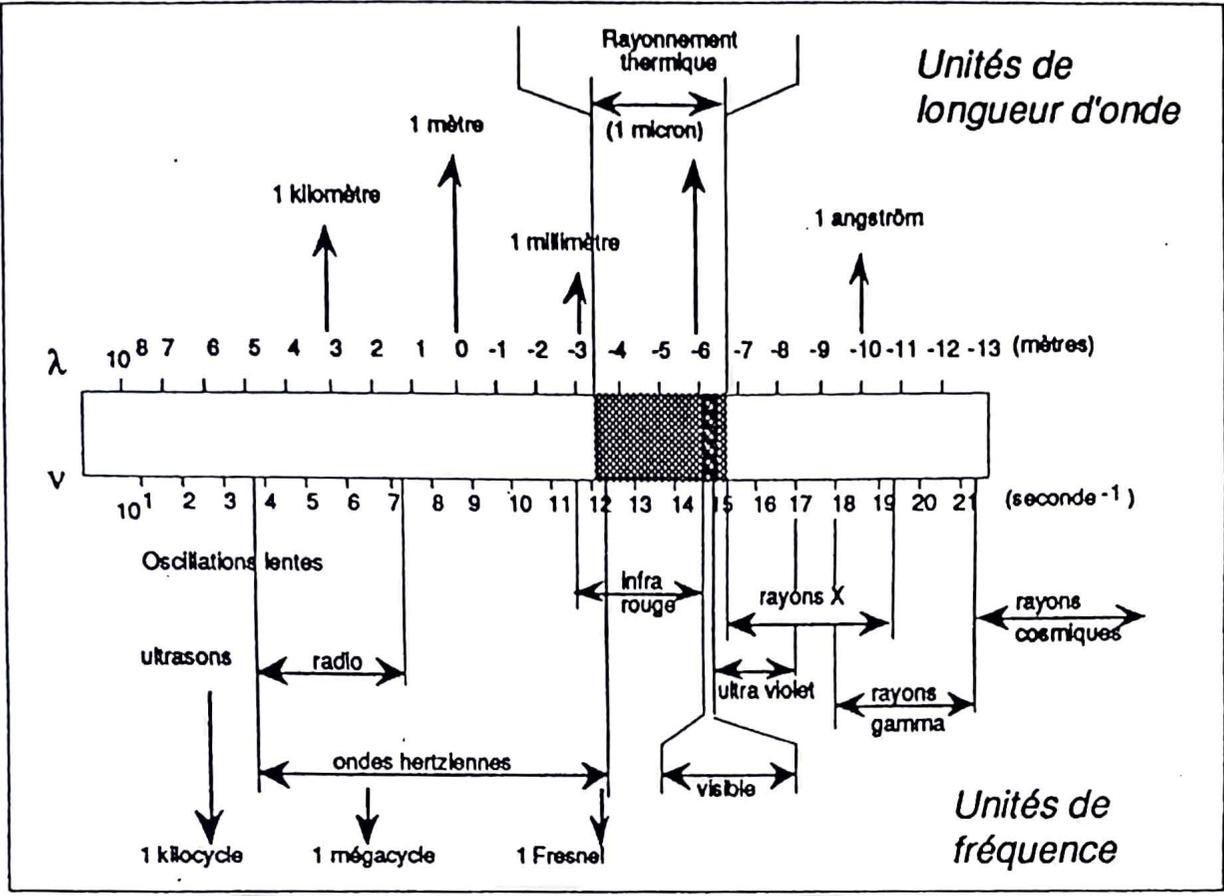
- comme *émetteur*, car il envoie toujours un rayonnement (sauf s'il est parfaitement transparent), lié à sa température ;
- comme *récepteur*, car il reçoit des rayonnements (φ_i) émis (ou réfléchis et diffusés) par les corps qui l'entourent. A ce titre, il en absorbe une partie (φ_a) et en réfléchit le reste (φ_r); donc, le flux de rayonnement *provenant* d'un corps est très souvent la somme du flux (φ_e) émis et du flux (φ_r) réfléchi.



Le total ($\varphi_e + \varphi_r$) porte parfois le nom de "*radiosité*".

La figure ci-après situe les rayonnements électromagnétiques par ordre de longueurs d'onde λ décroissantes (ou par ordre de fréquences ν croissantes ; $\lambda = c/\nu$). On y distingue, en particulier :

- le rayonnement "thermique" qui s'étage de l'infrarouge au début de l'ultra-violet,
- le rayonnement "visible", entre 0,4 et 0,8 μm .

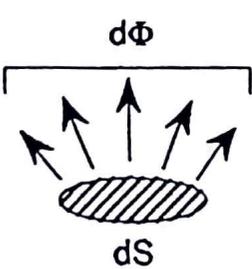


2. Le rayonnement des corps opaques

2.1. Le corps opaque en tant qu'émetteur de rayonnement

Nous devons énumérer un certain nombre de définitions que nous présentons ici d'une manière simplifiée. Le vocabulaire employé dépend souvent des auteurs.

2.1.1. e : "émittance énergétique" (ou "pouvoir émissif total")



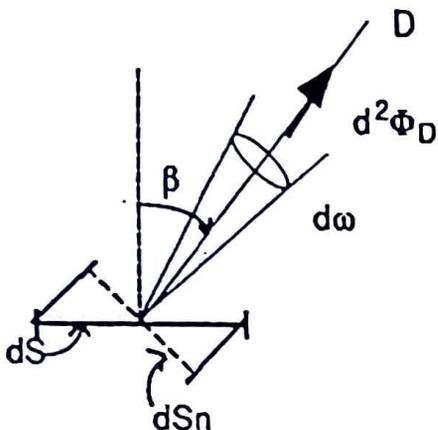
L'élément de surface dS du corps émet un flux $d\Phi$ (W) lié à sa température ($d\Phi = 0$ à zéro degré absolu).

Posons $e = \frac{d\Phi}{dS}$ (W/m^2) : e est donc la densité de flux émis par dS dans toutes les directions.

Exemple :

L'émittance est égale à σT^4 pour les corps noirs (voir paragraphe 2.3.2.)

2.1.2. L_D : "luminance" dans la direction D



Considérons, à nouveau, un élément de surface dS . Intéressons nous à la direction D définie par l'angle β , et à la fraction $(d^2\Phi_D)$ du flux $d\Phi$ contenue dans le cône élémentaire d'angle solide $d\omega$ dans cette direction D .

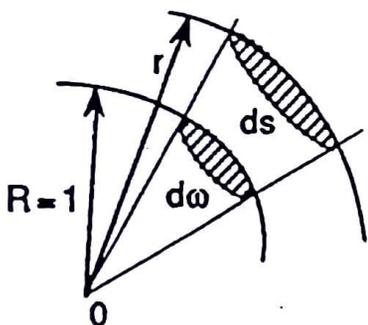
Vu de cette direction, tout se passe comme si le flux était émis par la surface dS_n , normale à D ($dS_n = dS \cos \beta$).

Si maintenant nous baptisons "luminance" (L_D) le flux rayonné par unité d'angle solide dans la direction D et par unité de surface perpendiculaire à D , L_D permet d'écrire la fraction $(d^2\Phi_D)$ du flux $d\Phi$, évoquée ci-dessus :

$$L_D = \frac{d^2 \Phi_D}{dS_n \cdot d\omega}$$

On dira également que L_D est la "brillance" de la surface, vue de la direction D .

L_D s'exprime en "watts par mètre carré de surface normale et par stéradian".



Remarques :

Rappelons que l'angle solide $d\omega$ d'un cône élémentaire se définit comme la surface de l'intersection de la sphère de rayon $R = 1$ avec le cône centré en O ($d\omega$ en *stéradians*) et comme

$$\frac{d\omega}{1^2} = \frac{ds}{r^2} \Rightarrow d\omega = \frac{ds}{r^2}$$

Pour l'espace complet : $\omega = \frac{4\pi R^2}{R^2} = 4\pi$.

Forêts des deux définitions précédentes, nous pouvons énoncer la *loi de Lambert* :

"la luminance des surfaces dites diffuses est indépendante de la direction D" :

$$L_D = L$$

Cela veut dire que l'on "voit" ces surfaces avec la même intensité lumineuse (ou brillance) quelle que soit la direction d'observation. Ce sera le cas de quasiment toutes les surfaces qui nous concernent, pour lesquelles L ne dépend que de la température de la surface.

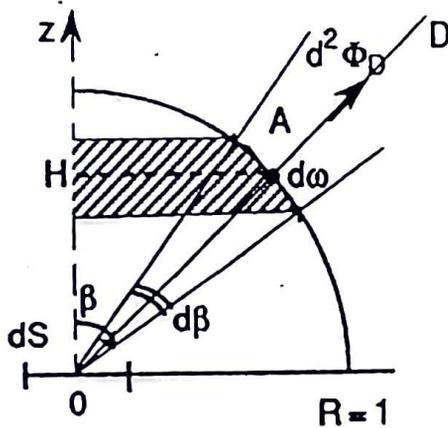
En reprenant la formule du paragraphe 2.1.2., le flux élémentaire dans la direction D s'écrit donc : $d^2\Phi_D = L dS \cos \beta d\omega$.

Nous pouvons alors recalculer le flux total $d\Phi$ en intégrant $d^2\Phi_D$ sur le demi-espace au-dessus de dS :

$$d\Phi = \int_{1/2 \text{ esp.}} d^2\Phi_D = \int_{1/2 \text{ esp.}} L dS \cos \beta d\omega$$

et

$$e = \frac{d\Phi}{dS} = L \int_{1/2 \text{ esp.}} \cos \beta d\omega.$$



L'intégrale de $d\omega$ autour de Oz donne la surface de la couronne sphérique hachurée

$$= 2 \pi A H \cdot R d\beta$$

$$= 2 \pi \sin \beta d\beta$$

et

$$\int_{1/2 \text{ esp.}} \cos \beta d\omega = \int_0^{\pi/2} 2\pi \sin \beta \cdot \cos \beta d\beta = \pi \int_0^{\pi/2} \sin 2\beta d\beta = \pi$$

donc

$$e = \pi L$$

2.1.4. Flux élémentaire dans la direction D

Nous retiendrons que la fraction de flux émise dans la direction D s'écrit :

$$\boxed{d^2\Phi_D = \frac{e}{\pi} dS \cos\beta \cdot d\omega} \quad (W)$$

e étant l'émittance (W/m^2) de la source.

C'est cet élément de flux qui nous servira à calculer les échanges de chaleur par rayonnement entre deux corps (cf. paragraphe 4.2.).

On peut affiner les définitions précédentes en considérant non plus le flux total $d^2\Phi_D$ rayonné sur toutes les longueurs d'onde, mais le flux *élémentaire* $d^3\Phi_{D\lambda}$ rayonné dans la bande spectrale $\lambda, \lambda + d\lambda$,

$$\text{d'où} \quad d^2\Phi_D = \int_0^\infty \frac{d^3\Phi_{D\lambda}}{d\lambda} d\lambda.$$

On définira alors l'*émittance monochromatique directionnelle* $e_{D\lambda}$:

$$e_{D\lambda} = \frac{d^3\Phi_{D\lambda}}{dS \cos\beta \cdot d\omega \cdot d\lambda}$$

$$\text{et} \quad e_\lambda = \int_{1/2 \text{ esp.}} e_{D\lambda} \cdot d\omega \cdot \cos\beta \quad \text{etc.}$$

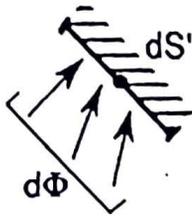
Ces considérations intéressent les corps "non gris" (cf. paragraphe 2.4.3.) qui concernent rarement les thermiciens. Nous nous contenterons donc d'utiliser la formule encadrée ci-dessus.

2.2. Le corps opaque en tant que récepteur de rayonnement

A nouveau, nous devons donner quelques définitions utiles.

2.2.1. Éclairement (ou irradiation)

"L'éclairement" est la densité de flux de chaleur φ "arrivant" sur l'unité de surface réceptrice dS' , en provenance du demi-espace visible par cette surface.

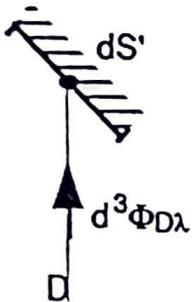


$$\varphi = \frac{d\Phi}{dS'} \quad (\text{W/m}^2)$$

Ce flux sera partiellement absorbé et partiellement réfléchi.

Il convient de ne pas confondre le flux $d\Phi$ arrivant sur dS' avec le flux $d\Phi'$ émis par dS' : le premier dépend des sources environnantes, et le deuxième de dS' elle-même.

2.2.2. Facteur d'absorption



Le facteur d'absorption de la surface dS' est le rapport :

$$\alpha = \frac{d\Phi_{\text{absorbé}}}{d\Phi}$$

Ce rapport varie entre 0 et 1.

En fait, le flux incident $d\Phi$ est composé d'une somme de flux $d^2\Phi_D$ provenant des diverses directions émettrices D , et que l'on peut eux-mêmes décomposer en un spectre de flux élémentaires $d^3\Phi_{D\lambda}$ fonctions également de λ . On parlera alors de $\alpha_{D\lambda}$, de α_λ (pour toutes les directions) et de α_D (pour toutes les longueurs d'onde).

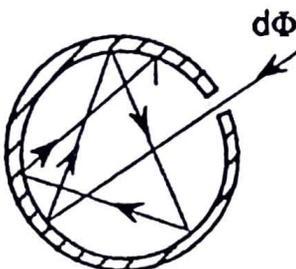
2.2.3. Le corps noir

On appelle corps noirs les corps pour lesquels $\alpha_{D\lambda} = 1$,

d'où

$$\alpha = 1$$

Ces corps absorbent *tout* le rayonnement incident.



Aucune surface n'est vraiment un corps noir, mais on peut s'en approcher en réalisant un objet creux avec une petite ouverture : le rayonnement incident sera en quelque sorte "piégé" à l'intérieur et donc absorbé par la cavité.

On le définira de la même façon :

$$\rho = \frac{d\Phi_{\text{réfléchi}}}{d\Phi} = 1 - \alpha$$

A nouveau, on pourra parler de $\rho_{D\lambda}$, ρ_{λ} , ρ_D .

La plupart du temps, les valeurs détaillées de $\alpha_{D\lambda}$, α_{λ} , α_D ne sont pas connues et le thermicien se contentera de raisonner en valeurs moyennes ("corps gris").

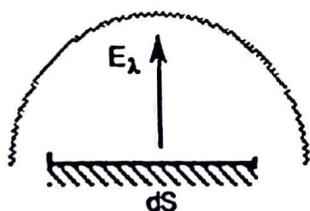
Notons que, pour le corps noir, $\rho = 0$.

2.3. Les lois du rayonnement thermique (corps noir)

2.3.1. Emittance monochromatique du corps noir - Lois de Planck et de Wien

Nous verrons plus loin (paragraphe 2.4.) que le corps noir est celui qui, à une température donnée, émet le maximum d'énergie calorifique : il sert donc de *référence* à partir de laquelle les propriétés émissives des autres surfaces se situent en retrait. Le corps noir figuré au paragraphe 2.2.3. peut, s'il est porté à la température T, constituer un four dont l'énergie émise par unité de surface de son ouverture serait supérieure à l'énergie émise par n'importe quelle autre surface à la même température T.

L'émittance monochromatique (appelée encore "pouvoir émissif", cf. paragraphe 2.1.1.) du corps noir est calculable thermodynamiquement. Elle ne dépend pas de la direction D, mais seulement de λ et de T. C'est la *loi de Planck* :



$$E_{\lambda} = \frac{d\Phi_{\lambda}}{dS} = \frac{C_1}{\lambda^5 \left[e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1 \right]} \quad (\text{W/m}^2 \cdot \mu\text{m})$$

(Le E majuscule est utilisé ici au lieu du e minuscule, pour distinguer le corps noir). C_1 et C_2 font intervenir la constante h de Planck, la constante k de Boltzmann et la vitesse c de la lumière :

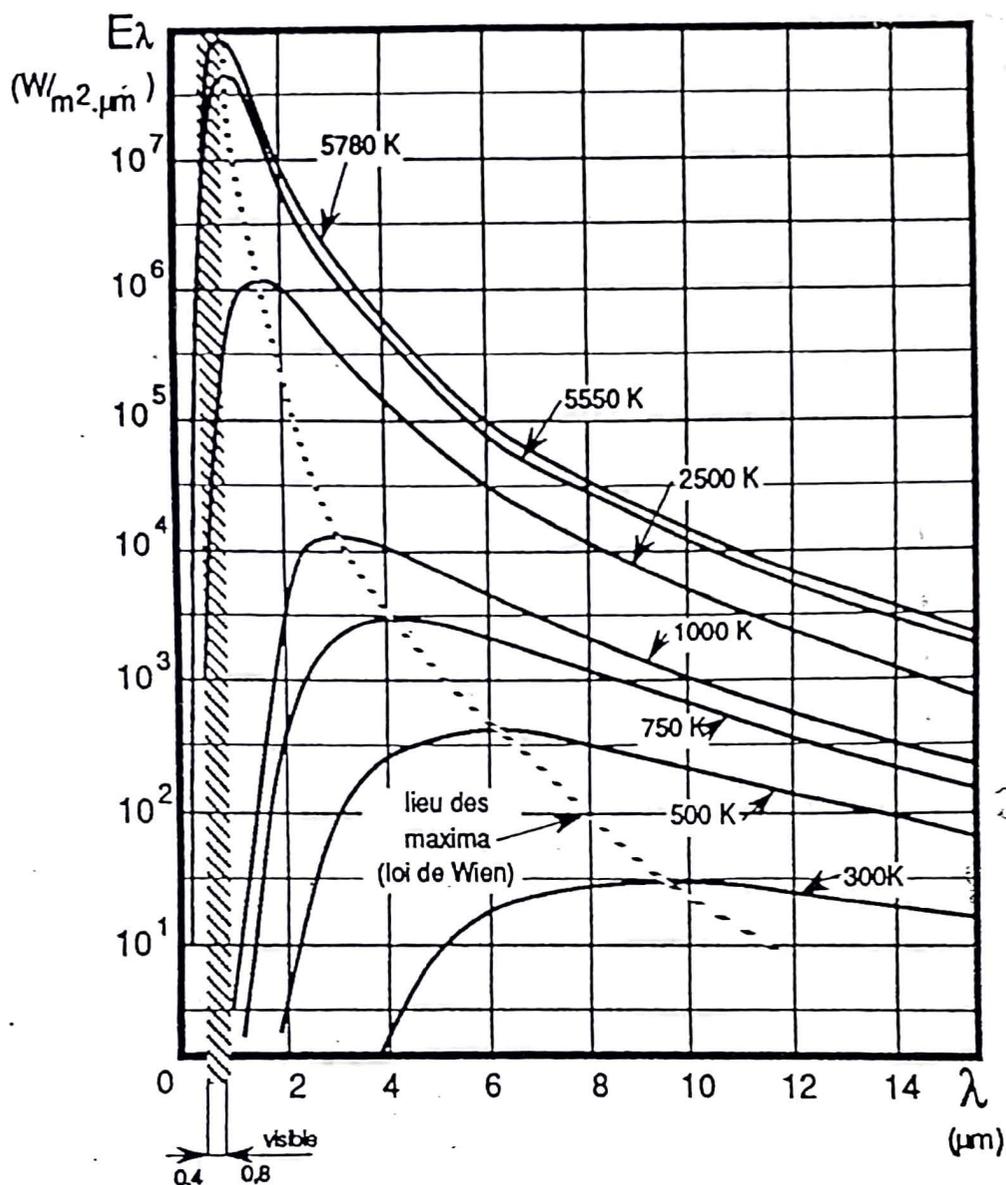
$$C_1 = 2\pi h c^2 = 3,74 \times 10^8,$$

$$C_2 = hc / k = 1,44 \times 10^4,$$

T en degrés K, λ en microns.

Cette fonction E_λ est représentée par le réseau de courbes ci-après.

Il faut comprendre E_λ comme étant exprimé en watts par m^2 de surface et par micron de longueur d'onde.



La loi de Wien permet d'exprimer commodément que les maxima de ces courbes se déplacent vers les petites longueurs d'onde quand la température augmente, selon la relation :

$$\lambda_m T = C^{te} = 2\,898 \mu m \cdot K$$

Ceci explique pourquoi les corps deviennent "visibles" pour des températures élevées, car l'énergie délivrée dans la bande "visible" augmente.

Exemple :

Quel est la fraction de flux émise par m^2 d'une surface noire à 1000 K entre 3 et 5 μm ?

Le flux recherché représente l'intégrale de la courbe de Planck à 1000 K sur la bande 3-5 μm .

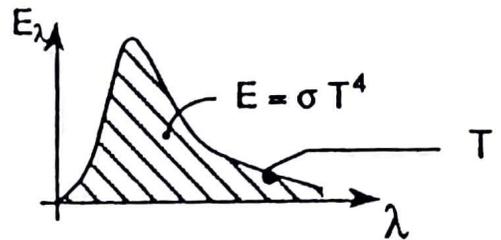
Pour 4 μm , on lit $E_\lambda = 10^4 \text{ W/m}^2 \cdot \mu\text{m}$;

donc $E_{3-5} \approx 10^4 \times \Delta\lambda = 20 \text{ kW/m}^2$ (valeur approchée de l'intégrale).

2.3.2. Émittance totale du corps noir - Loi de Stefan-Boltzmann

Si maintenant on s'intéresse à la totalité du flux émis par la surface sur l'ensemble des longueurs d'onde, il reste à intégrer, de 0 à l'infini, le flux monochromatique :

$$E = \frac{d\Phi}{dS} = \int_0^\infty E_\lambda d\lambda$$



L'intégration est laborieuse ; son résultat est la *loi de Stefan-Boltzmann* :

$$E = \sigma T^4$$

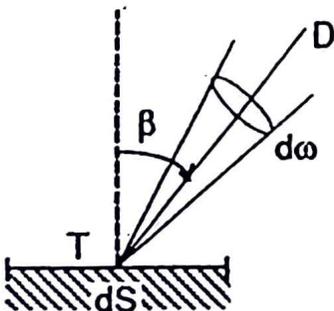
$$(\text{W/m}^2)$$

T est exprimé en degrés K.

σ est la "constante de Stefan" : $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ (W/m}^2 \cdot \text{K}^4)$

Exemple :

Quel est le flux élémentaire total émis par un corps noir dans l'angle solide $d\omega$ (direction D) ?



Reprenons le calcul du paragraphe 2.1.4. ; l'émittance totale e est ici celle du corps noir $E = \sigma T^4$, donc :

$$d^2\Phi_D = \frac{\sigma T^4}{\pi} dS \cos\beta d\omega$$

Cette relation est fondamentale dans les calculs d'échange de chaleur par rayonnement.

Son intégrale $\int_{1/2\text{esp}} d^2\Phi_D = d\Phi = \frac{\sigma T^4}{\pi} dS \int_{1/2\text{esp}} \cos\beta d\omega$

redonne naturellement $\frac{d\Phi}{dS} = \sigma T^4 = E$ (cf. paragraphe 2.1.3.).

2.4. Le rayonnement des corps opaques non noirs

Le corps noir est l'émetteur idéal, c'est-à-dire qu'à la température T , c'est celui qui émet le flux le plus élevé (E_λ , et au total : E). Les corps opaques réels sont toujours en retrait par rapport au corps noir, c'est-à-dire qu'ils n'émettent qu'une fraction de E_λ .

2.4.1. Le facteur d'émission (monochromatique) : ϵ_λ

L'émittance monochromatique d'un corps non noir s'écrira donc :

$$\boxed{e_\lambda = \epsilon_\lambda \cdot E_\lambda} \quad (\text{W/m}^2 \cdot \mu\text{m})$$

ϵ_λ = facteur d'émission (monochromatique) [$0 \leq \epsilon_\lambda \leq 1$].

2.4.2. Le facteur d'émission (total) : ϵ

L'émittance totale d'une surface dS peut s'exprimer par l'intégrale des émittances monochromatique (cf. paragraphe 2.1.4.).

$$e = \frac{d\Phi}{dS} = \int_0^\infty e_\lambda d\lambda$$

$$\text{donc : } e = \int_0^\infty \epsilon_\lambda E_\lambda d\lambda < \int_0^\infty E_\lambda d\lambda = E.$$

Nous écrivons

$$\boxed{e = \epsilon \cdot E} \quad (\text{W/m}^2)$$

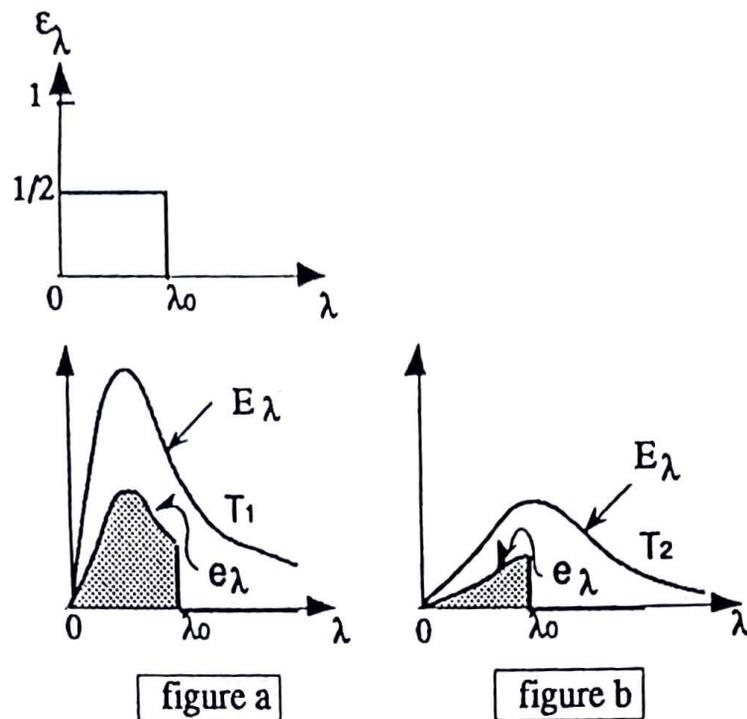
ϵ = facteur d'émission (total) [$0 \leq \epsilon \leq 1$].

Que vaut ϵ par rapport à ϵ_λ ? Raisonnons sur un exemple.

Imaginons une surface (fictive) pour laquelle ϵ_λ vaudrait :

- $\epsilon_\lambda = 1/2$ pour $0 < \lambda < \lambda_0$ et $\epsilon_\lambda = 0$ pour $\lambda \geq \lambda_0$
(voir figure ci-après)

- température = T_1 ou température = T_2
 [$E_\lambda, T_1 = \text{fig. a}$] [$E_\lambda, T_2 = \text{fig. b}$]



Les courbes e_λ correspondantes ($e_\lambda = \epsilon_\lambda E_\lambda$) sont situées à "mi-hauteur" de E_λ entre 0 et λ_0 . Leurs intégrales e (zones hachurées) ont des "allures" différentes dans les exemples à T_1 et à T_2 (figure a et b).

On voit donc que les deux ϵ ($= e/E$) ne seront pas égaux et qu'il faudra parler de $\epsilon(T_1)$ et $\epsilon(T_2)$.

2.4.3. Le corps gris

Un cas particulier vient immédiatement à l'esprit : celui où ϵ_λ est *constant* quel que soit λ . Un tel corps sera appelé *corps gris*.

Cette hypothèse est le plus souvent parfaitement convenable et ce sera celle qui permettra, *en pratique*, à l'ingénieur de faire des calculs d'échange de chaleur par rayonnement.

$$\epsilon_\lambda = \epsilon = \text{constante}$$

$$\text{Dans ce cas : } e = \int_0^\infty \epsilon_\lambda E_\lambda d\lambda = \epsilon \int_0^\infty E_\lambda d\lambda = \epsilon E$$

L'émittance totale du corps gris (flux émis par m^2) est donc :

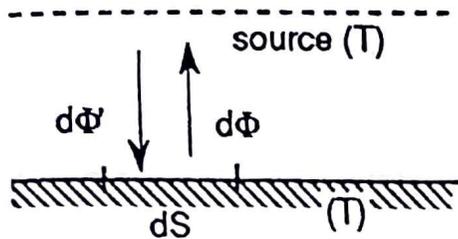
$$e = \epsilon \sigma T^4 \quad (\text{W}/m^2) \quad 0 < \epsilon < 1$$

Pour le corps *noir* :

$$\boxed{\epsilon_{\lambda} = \epsilon = 1}$$

2.4.4. La loi de Kirchhoff

Elle établit un rapport entre le coefficient d'absorption α et le coefficient d'émission ϵ d'une même surface.



Soit une surface *grise* dS à la température T . Elle *reçoit* un flux $d\Phi'$, donc elle *absorbe* $\alpha \cdot d\Phi'$. Simultanément elle *émet* :

$$d\Phi = \epsilon \cdot dS = \epsilon E \cdot dS \quad (E = \sigma T^4)$$

A l'équilibre, le bilan est nul :

$$\alpha d\Phi' - \epsilon \sigma T^4 \cdot dS = 0$$

Si $d\Phi'$ provient d'une source noire à la même température T , les conditions de l'équilibre sont satisfaites (échange de chaleur nul) ; alors :

$$d\Phi' = \sigma T^4 \cdot dS$$

[On a choisi une source noire pour que le flux $d\Phi$ émis par dS ne soit pas réfléchi par cette surface, ce qui compliquerait le calcul].

$$\text{Donc } \alpha (\sigma T^4 \cdot dS) - \epsilon (\sigma T^4 dS) = 0$$

et

$$\boxed{\alpha = \epsilon}$$

(pour les corps gris)

La loi de Kirchhoff stipule ainsi que les facteurs d'absorption et d'émission des corps gris sont égaux.

Ceci signifie que, quand un corps gris absorbe 30% (par exemple) de l'énergie qu'il reçoit, simultanément il réémet 30% de l'énergie qu'aurait émise un corps noir à la même température... ce qui est loin d'être une évidence.

Pour les corps *non gris*, on montre, par le même genre d'analyse, que

$$\alpha_{D\lambda} = \epsilon_{D\lambda} \quad \text{et}$$

$$\boxed{\alpha_{\lambda} = \epsilon_{\lambda}}$$

ce qui se traduit par $\alpha \neq \epsilon$

(cf. paragraphe 2.4.2.).

Pour les *corps noirs*,

$$\boxed{\alpha = \epsilon = 1}$$

2.4.5. Facteurs d'absorption et d'émission des corps opaques usuels

- Corps non métalliques

L'hypothèse *corps gris* est excellente.

Pour des réfractaires, on prendra $\epsilon = 0,8$. Se reporter à des ouvrages spécialisés si on ambitionne une plus grande précision.

Pour des peintures réfléchissantes par exemple, on pourra trouver $\epsilon = 0,3$.
Pour le graphite, $\epsilon \approx 1$.

Naturellement, le facteur d'absorption α est égal à ϵ .

- Métaux

Ces corps ne sont pas assimilables, en toute rigueur, à des corps gris, car :

- ϵ varie fortement avec λ ,
- ϵ varie avec la température,
- α peut varier avec l'angle du rayonnement incident (métaux polis = réflexion spéculaire),
- ϵ et α varient avec l'état de surface (oxydation, rugosités, etc.).

Quelques exemples de valeurs de ϵ :

fer poli	: 0,15 (20°C) à 0,35 (900°C)
fonte oxydée	: 0,65 (20°C) à 0,85 (900°C)
aluminium poli	: 0,05
aluminium très oxydé	: 0,15

Pour les valeurs de $\epsilon_{D\lambda}$ ou ϵ_{λ} , la littérature fournit des courbes très irrégulières et très liées à l'expérimentation : elles n'ont que peu d'intérêt ici. Nous continuerons à estimer que l'hypothèse $\epsilon = \alpha = \text{constante}$ pour chaque surface métallique représente une valeur moyenne acceptable.

Remarque : la *couleur* d'un corps est liée à la *réflexion* de la lumière ambiante sur ce corps, ainsi qu'à l'*émission* de lumière provenant de sa surface (la somme des deux est la *radiosité* définie au paragraphe 1.).

Exemple :

Si un corps absorbe toutes les longueurs d'ondes sauf celles correspondant à la couleur bleue, il sera vu "bleu" par l'oeil. Le plâtre, qui est de couleur blanche est en fait plutôt "noir" au sens du rayonnement vis à vis des rayonnements thermiques infrarouges ...

2.5. Résumé

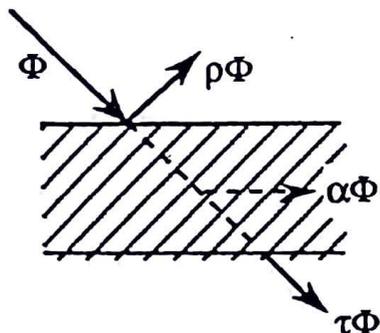
Les "bagages" élémentaires qui permettent à l'ingénieur de faire des calculs d'échange de chaleur par rayonnement sont, en résumé, les suivants (cf. notations du paragraphe 2) :

- $e = \frac{d\Phi}{dS}$ = densité de flux émise par la surface dans tout le demi-espace (= émittance) ;
- $d^2\Phi_D = \frac{e}{\pi} dS \cos\beta d\omega$ = élément du flux émis dans la direction D ;
- facteur d'absorption α }
 facteur de réflexion ρ } \Rightarrow $\left\{ \begin{array}{l} \rho = 1 - \alpha \\ \alpha = \varepsilon \text{ pour les corps gris} \end{array} \right.$
 facteur d'émission ε }
- corps noir : $\alpha = \varepsilon = 1$
 émittance : $e = E = \sigma T^4$;
- corps gris : $\alpha = \varepsilon < 1$
 émittance : $e = \varepsilon E = \varepsilon \sigma T^4$.

3. Le rayonnement des corps partiellement transparents

Nous ne donnons ici que quelques éléments utiles concernant les milieux semi-transparentes (verres, gaz absorbants, fumées chargées en particules).

3.1. Généralités

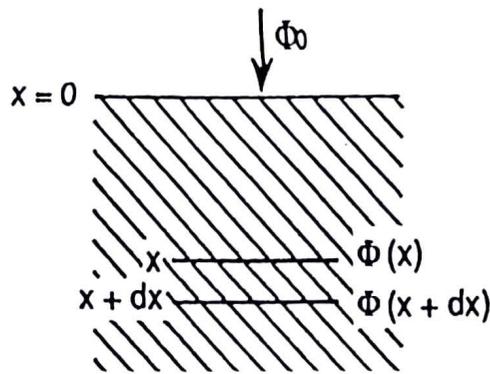


En raison de la perméabilité de la matière au rayonnement, on doit compléter les notions d'absorption (α) et de réflexion (ρ) par la notion de transmission (τ) de l'énergie.

Le bilan donnera :

$$\alpha + \rho + \tau = 1$$

Nous nous intéresserons essentiellement aux gaz, pour lesquels $\rho \approx 0$.
 A nouveau, on peut également définir $\alpha_\lambda, \rho_\lambda, \tau_\lambda$.



Définissons une loi d'absorption. Quand un rayonnement Φ_0 pénètre dans un milieu semi-transparent, il "s'éteint" progressivement par absorption ; entre x et $(x + dx)$, il aura perdu un certain pourcentage de sa valeur en x : on fait l'hypothèse que ce pourcentage est proportionnel à dx . Donc :

$$\frac{d\Phi(x)}{\Phi(x)} = -K dx$$

(le signe - vient du fait que le flux diminue). Cette équation différentielle s'intègre d'une manière générale en :

$$\Phi(x) = \Phi_0 \cdot e^{-K \cdot x}$$

loi de Beer

En fait, le problème peut se décomposer en une somme $\sum \Phi_\lambda(x)$ avec un coefficient K_λ pour chaque longueur d'ondes :

$$\Phi_\lambda(x) = \Phi_{0\lambda} \cdot e^{-K_\lambda x}$$

Nous nous contenterons d'une formule globale.

3.2. Les gaz comme récepteurs de rayonnement

Une couche gazeuse d'épaisseur L absorbera donc

$$\Phi_{\text{abs}} = \Phi_0 - \Phi(L) = \Phi_0 [1 - e^{-KL}] = \alpha_L \Phi_0$$

$$\alpha_L = 1 - e^{-KL}$$

est donc le coefficient d'absorption de la couche L .

Remarques :

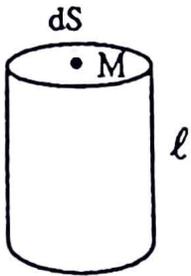
- si $L \rightarrow \infty$, $\alpha \rightarrow 1$: un gaz très épais (le ciel par exemple) est assimilable à un *corps noir*.

- le facteur de transmission sera donc :

$$\tau_L = e^{-KL} = 1 - \alpha_L.$$

Le problème consistera à évaluer K, à partir duquel on aura le facteur d'absorption α et celui de transmission $(1 - \alpha)$.

3.3. Les gaz comme émetteurs de rayonnement



Si on décompose un volume de gaz en volumes élémentaires, chacun de ces derniers va émettre un rayonnement dans toutes les directions : ce rayonnement sera partiellement absorbé par tous les autres éléments de volume.

On peut ainsi étendre les définitions liées aux surfaces des corps opaques au cas d'un petit volume de gaz de section dS et de longueur l : le flux $d\Phi$ émis par ce volume à travers dS , sera fonction de l'épaisseur l et des propriétés du gaz.

Le pouvoir émissif $e_{\lambda l}$ en M, défini comme étant $d\Phi_{\lambda l}/dS$, peut s'exprimer par rapport à celui d'une surface noire dS , à la même température, par $e_{\lambda l} = \varepsilon_{\lambda l} \cdot E_{\lambda l}$.

La loi de Kirchhoff s'applique, étendue à l'épaisseur L du gaz :

$$e_{\lambda L} = \alpha_{\lambda L} = 1 - e^{-K_{\lambda}L}$$

Les gaz ne sont *pas des corps gris* : $\varepsilon_L \neq \alpha_L$. En effet, ε_L dépend de la température du gaz, alors que α_L dépend de la température du rayonnement absorbé.

3.4. Coefficients d'émission et d'absorption du gaz carbonique et de la vapeur d'eau

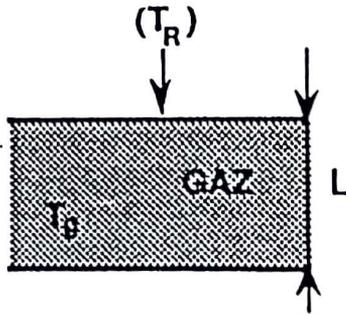
Le gaz carbonique et la vapeur d'eau sont importants en pratique car, présents en grande quantité dans les gaz de combustion, leur rayonnement est parfois essentiel dans les échanges de chaleur entre les flammes ou les gaz chauds et les charges à réchauffer (à l'inverse, l'air est transparent au rayonnement).

Leurs principales bandes d'absorption et d'émission sont les suivantes :

	CO ₂		H ₂ O	
λ	2,36	à 3,02	2,24	à 3,25
(μm)	4,01	à 4,80	4,8	à 8,5
	12,5	à 16,5	12	à 25

Cela signifie que ces gaz ont un certain coefficient d'absorption (et d'émission) pour ces plages de longueurs d'onde et sont pratiquement transparents (et non émetteurs) pour les autres valeurs du spectre de longueurs d'onde.

Les diagrammes ci-après (cf. paragraphe 3.4.1. et 3.4.2.) donnent le *facteur global d'émission* (pour tout le spectre), soit ϵ , en fonction de la température du gaz T_g (degrés K) et pour diverses valeurs du produit de la *pression partielle* P (de CO_2 ou de H_2O) par l'*épaisseur* L de gaz : $\epsilon = f(T_g, PL)$.



Ces *mêmes* courbes fournissent également le *facteur global d'absorption* α de cette couche de gaz d'épaisseur L vis à vis d'un *rayonnement incident* provenant d'une source extérieure à la température de "rayonnement" T_R : $\alpha = f(T_R, PL)$.

[Si c'est le flux incident Φ_R qui est connu, on calculera la température T_R du corps noir donnant le rayonnement équivalent par : $\Phi_R = \sigma T_R^4$].

Nous donnons ci-dessous le déroulement de ces calculs que l'on effectue séparément pour le CO_2 et pour l' H_2O . La procédure à suivre est assez lourde ; nous l'illustrerons par un exemple.

3.4.1. Cas du gaz carbonique CO_2

- Calcul de ϵ_c : on lit ϵ sur le diagramme concernant CO_2 pour le couple $[T_g, P_c L]$, P_c étant la pression partielle de CO_2 en atm.

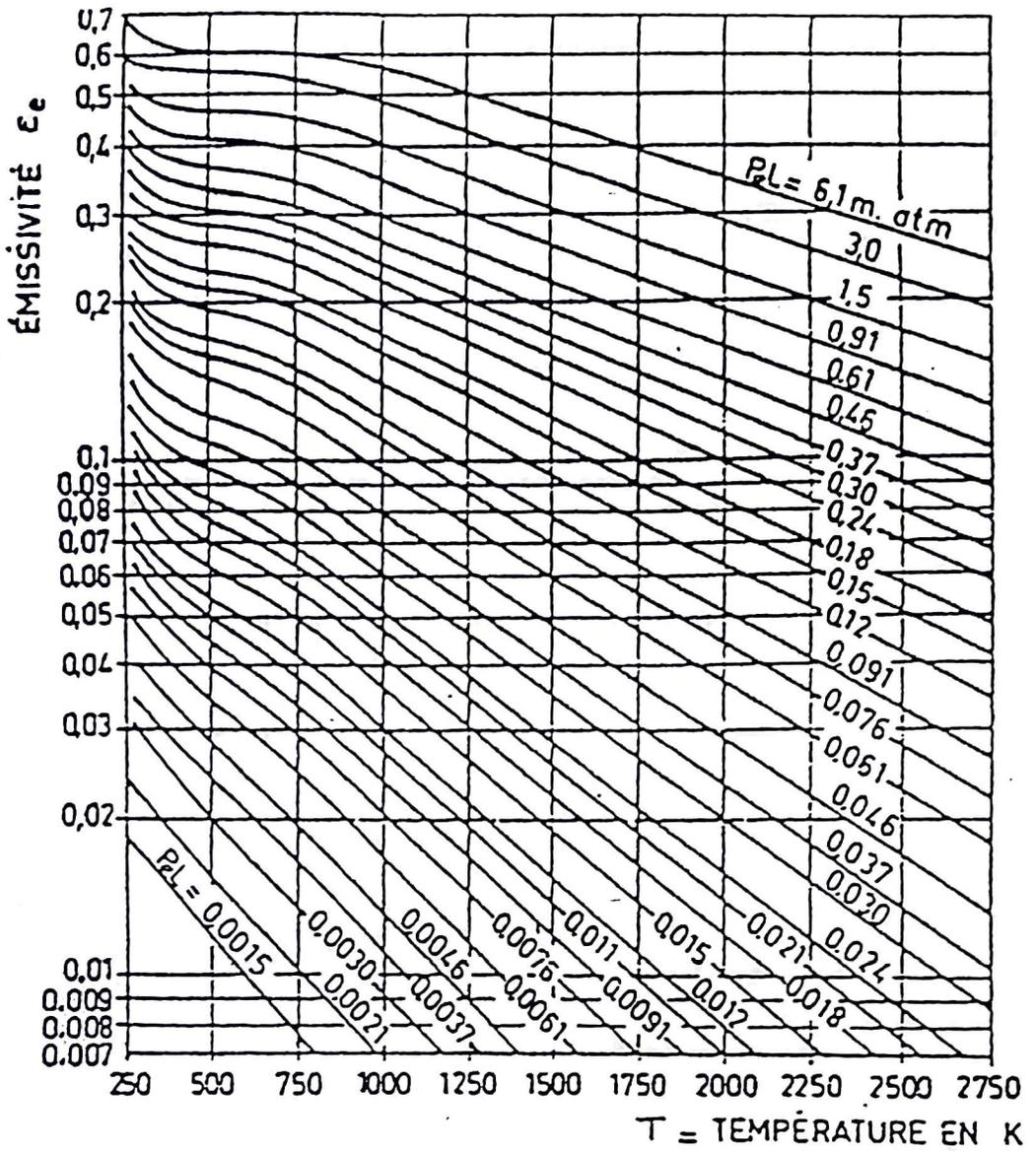
On a alors simplement : $\epsilon_c = \epsilon$.

- Calcul de α_c : deux cas sont à considérer,
 - si $T_g > T_R$, on lit ϵ' sur les courbes pour le couple $[T_R, P_c L]$ et on a $\alpha_c = \epsilon'$;
 - si $T_g < T_R$, on pose $(P_c L)^* = P_c L \cdot T_R/T_g$ et on lit ϵ' pour le couple $[T_R, (P_c L)^*]$; puis on calcule α_c par $\alpha_c = \epsilon' \cdot (T_g/T_R)^{0,65}$.

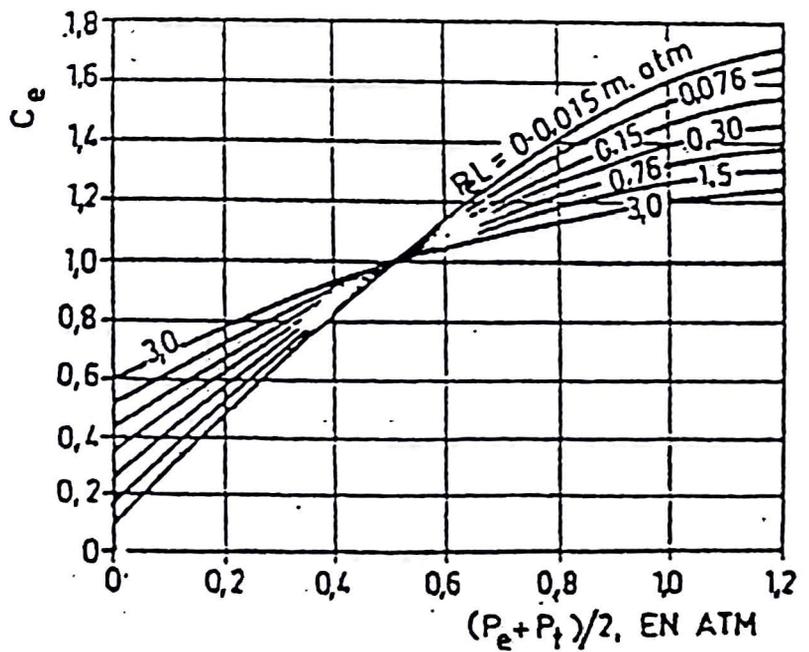
Il faut tenir compte des remarques suivantes :

- si le gaz contient CO_2 et CO , on assimilera CO à CO_2 ,
- si la pression totale P_t est différente de 1 atm, on effectuera une correction en multipliant le ϵ lu par le facteur de correction C_c tiré du diagramme fourni, et fonction de P_t et de $P_c L$: $\epsilon_c = \epsilon \cdot C_c$,

- même correction pour α_c :
 - $\alpha_c = \epsilon' \cdot C_c$
 - ou $\alpha_c = \epsilon' \cdot C_c \cdot (T_g/T_R)^{0,65}$.



H₂O vap



Exemple :

Des produits de combustion emplissent un four de hauteur $L = 1,5 \text{ m}$.
La pression est $P_t = 2 \text{ atm}$.

Analyse du gaz : $\text{CO}_2 : 15\%$
 $\text{H}_2\text{O} : 20\%$
 $\text{N}_2 : 65\%$

$T_g = 1\,500^\circ\text{C}$. Calculer l'émissivité ϵ_c du gaz, liée au CO_2 , dans le sens vertical.

Les courbes concernant le CO_2 (voir page suivante) donnent :

pression partielle $\text{CO}_2 : P_c = 0,15 \times 2 \text{ atm} = 0,3 \text{ atm}$.

paramètre $P_c L = 0,3 \times 1,5 = 0,45 \text{ m.atm}$ | $d'o\grave{u} \epsilon = 0,12$
 $T_g = 1\,773 \text{ K}$

correction : $P_t = 2 \text{ atm}$ | $d'o\grave{u} C_c \approx 1,1$
 $P_c L = 0,45 \text{ m.atm}$

donc $\epsilon_c = 0,12 \times 1,1 = 0,13$.

Supposons maintenant que la paroi du four émet un flux de 1160 kW/m^2 . Calculer le coefficient d'absorption α_c du gaz, lié au CO_2 , vis-à-vis de ce flux.

$$\Phi_R = 1,16 \cdot 10^6 \text{ W/m}^2 = \sigma T_R^4.$$

On en déduit : $T_R = 2\,127 \text{ K}$ ($1\,855^\circ\text{C}$) (donc $T_g < T_R$).

$(P_c L)^* = 0,45 \times 2\,127 / 1\,773 = 0,54$ | $d'o\grave{u} \epsilon' = 0,10$
 $T_R = 2\,127 \text{ K}$

correction identique : $C_c \approx 1,1$, donc :

$$\alpha_c = 0,10 \times 1,1 \left(\frac{1773}{2127} \right)^{0,65} = 0,10 .$$

On voit que $\alpha_c \neq \epsilon_c$.

3.4.2. Cas de la vapeur d'eau H₂O

- calcul de ϵ_e : ici le calcul ne dépend plus seulement de T_g et $P_e L$ (P_e : pression partielle de la vapeur d'eau), mais aussi de P_c . D'où lecture de ϵ sur le diagramme concernant H₂O (voir page précédente), avec le couple $[T_g, P_e L]$. On corrige en multipliant par C_e tiré de l'autre diagramme, fonction de $\frac{P_e + P_t}{2}$ et de $P_e L$;
le résultat est alors : $\epsilon_e = \epsilon \cdot C_e$.
- calcul de α_e : calcul de T_R , puis lecture de ϵ' pour $[T_R, P_e L]$, avec correction par C_e ; d'où $\alpha_e = \epsilon' \cdot C_e$.

Exemple :

Poursuivons l'exemple du paragraphe 3.4.1.

$$P_e = 0,20 \times 2 = 0,40$$

$$P_e L = 0,40 \times 1,5 = 0,60$$

$$T_g = 1\,773\text{ K}$$

d'où $\epsilon = 0,19$

$$\text{et } \frac{P_e + P_t}{2} = 1,2$$

$$P_e L = 0,6$$

d'où $C_e = 1,40$

$$\text{donc } \epsilon_e = 0,19 \times 1,4 = 0,27$$

$$T_R = 2\,127\text{ K}$$

$$P_e L = 0,60$$

d'où $\epsilon' = 0,15$

$$\text{et } \alpha_e = \epsilon' C_e = 0,15 \times 1,4 = 0,21.$$

A nouveau, on observe que $\alpha_e \neq \epsilon_e$.

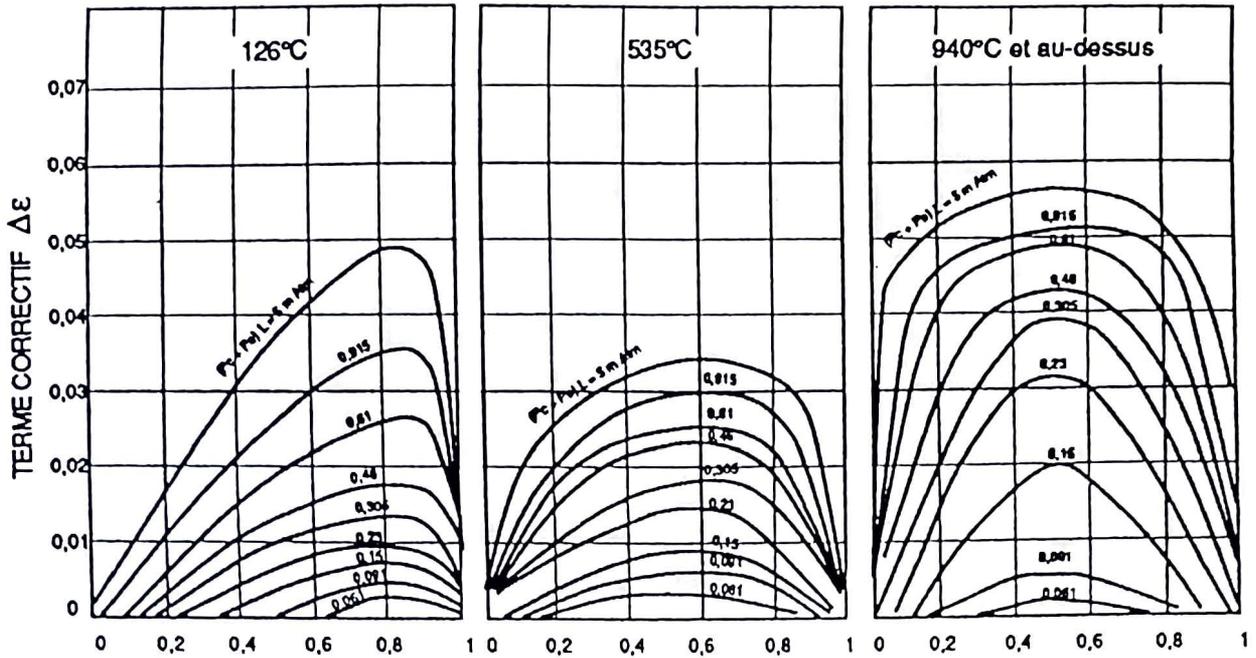
3.4.3. Cas des mélanges CO₂ - H₂O

Si l'on se contente de faire la somme des valeurs trouvées pour CO₂ et H₂O, les résultats seront légèrement par excès car il y a empiètement des bandes d'absorption et d'émission des deux gaz.

Il convient de corriger ces résultats grâce aux diagrammes suivants dans lesquels l'abscisse est cette fois-ci, $\frac{P_e}{P_c + P_e}$, et le paramétrage des courbes est fait avec $(P_e + P_c) \cdot L$ m.atm ; la correction ($\Delta\epsilon$ ou $\Delta\alpha$, lus sur les mêmes diagrammes) est, de plus, fonction de la température du rayonnement.

D'où finalement : $\epsilon_g = \epsilon_c + \epsilon_e - \Delta\epsilon$

$$\alpha_g = \alpha_c + \alpha_e - \Delta\alpha$$



$$\text{abscisse : } \frac{P_e}{P_c + P_e}$$

Exemple :

Terminons notre exemple du paragraphe 3.4.1.:

$$P_c + P_e = 0,3 + 0,4 = 0,7 ; \quad \frac{P_e}{P_c + P_e} = \frac{0,4}{0,7} \approx 0,6 ;$$

$$(P_c + P_e) \cdot L = 1,05,$$

$$\text{d'où } \Delta\epsilon = \Delta\alpha \approx 0,05$$

$$\text{et } \epsilon_g = \epsilon_c + \epsilon_e - \Delta\epsilon = 0,13 + 0,27 - 0,05 = 0,35$$

$$\alpha_g = \alpha_c + \alpha_e - \Delta\alpha = 0,10 + 0,21 - 0,05 = 0,26$$

ϵ_g et α_g représentent ainsi les facteurs globaux d'émission et d'absorption du gaz défini dans l'exemple du paragraphe 3.4.1.

3.5. Les gaz chargés de particules

Certains gaz (partiellement ou totalement transparents) peuvent véhiculer des particules solides (suies, etc.). Leurs facteurs d'émission et d'absorption en sont totalement modifiés. C'est le cas des flammes. On distinguera :

- les flammes *claires*, dont les "fumées" ne contiennent que CO - CO₂ - H₂ - H₂O - O₂ - N₂ ; prenons l'exemple de la combustion du méthane (CH₄) avec 20% d'excès d'air, on aurait (cf. partie 2a) :

CO ₂	=	8%
H ₂ O	=	16%
O ₂	=	3%
N ₂	=	73%

et pour une couche $L = 2$ m, par exemple :

T (K)	1000	1200	1400	1600	1800	2000
$\epsilon_g \approx$	0,36	0,32	0,28	0,24	0,20	0,17

- les flammes *lumineuses* ; les études sur les gaz chargés en particules font apparaître un coefficient d'extinction K_p , lié au nuage de particules, et on calcule alors : $\epsilon_p = \alpha_p = \alpha_c (1 - e^{-K_p L})$; $\alpha_c \approx 1$ pour le carbone-suie. Puis $\epsilon_{tot} = 1 - (1 - \epsilon_p)(1 - \epsilon_g) > \epsilon_g$, ϵ_g étant l'émissivité du gaz clair.

Tout ceci ne peut être approché que par l'expérimentation.

4. Calcul des échanges de chaleur par rayonnement

4.1. Généralités

Nous avons jusqu'ici considéré le cas d'un corps rayonnant *isolé dans l'espace* et nous avons examiné les deux comportements de ce corps en tant qu'émetteur et récepteur de rayonnement.

Lorsque plusieurs corps sont *en présence*, chacun d'eux émet un rayonnement dans toutes les directions et reçoit un rayonnement complexe qui est la résultante des émissions directes des corps qui l'entourent et d'un grand nombre de réflexions (qui lui renvoient, en particulier, une partie de son propre rayonnement).

Le problème se pose donc dans la pratique de calculer le solde net des échanges par rayonnement entre tous les corps en présence ; chacun des corps émet un rayonnement suivant des lois qui, la plupart du temps, ne sont pas celles du corps noir ; d'autre part, il absorbe et transforme en chaleur une partie des radiations qu'il reçoit et, suivant qu'il est opaque ou partiellement transparent, réfléchit ou laisse passer le restant ; au total, chaque radiation suit un trajet compliqué, s'affaiblissant peu à peu en traversant les milieux partiellement transparents, changeant de direction et s'affaiblissant également quand elle est réfléchi par la surface d'un corps opaque.

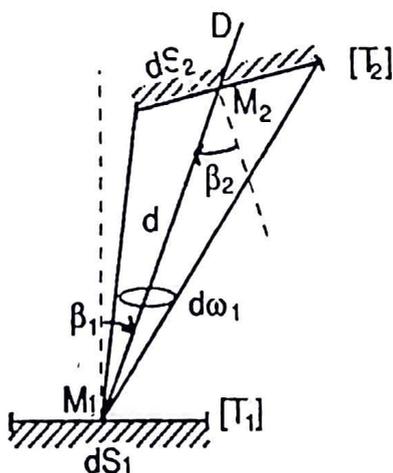
Le simple énoncé qualitatif du problème laisse présager que, dans la plupart des cas, le calcul exact des échanges sera matériellement impossible. Pourtant, l'étude des appareils industriels nécessite qu'on puisse déterminer avec une certaine approximation les échanges qui s'établissent par rayonnement.

On a donc été amené à étudier certains cas simples pour lesquels le calcul des échanges entre les corps est possible, moyennant d'ailleurs, en général, une première approximation qui consiste à assimiler tous les corps solides rencontrés à des *corps gris*.

Lorsqu'on est en présence d'un problème pratique, on cherche, la plupart du temps, à se ramener à des cas dont la solution est connue, en négligeant certains échanges, en simplifiant la forme de certaines surfaces, etc.

Les cas étudiés aboutissent souvent à des formules ou des abaques et on pourrait penser que quiconque sait appliquer une formule (ou lire un abaque) et connaît la loi de Stefan (cf. paragraphe 2.3.2.) est capable de traiter un cas industriel... En réalité, la grande difficulté réside dans la "réduction" du cas réel à un cas connu : c'est ce qu'on appelle la *modélisation* du problème. Disons ici que c'est l'expérience qui guidera le thermicien vers une bonne modélisation des échanges de chaleur par rayonnement.

4.2. Échanges par rayonnement entre deux surfaces noires opaques, séparées par un milieu parfaitement transparent



Repartons du calcul de l'exemple du paragraphe 2.3.2. qui donnait le flux élémentaire total $d^2\Phi_1$ émis par un élément de surface dS_1 d'un corps noir dans l'angle solide $d\omega_1$ (direction D)

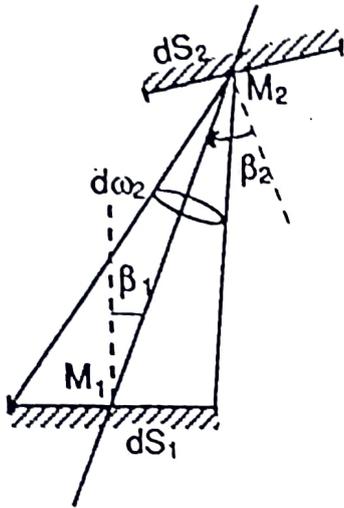
$$d^2\Phi_1 = \frac{\sigma T_1^4}{\pi} dS_1 \cos\beta_1 d\omega_1 .$$

Imaginons un deuxième corps noir dont l'élément de surface dS_2 est justement intercepté par $d\omega_1$.

Alors
$$d\omega_1 = \frac{dS_2 \cos\beta_2}{d^2} \quad (d = M_1M_2).$$

$$\text{Donc } d^2\Phi_1 = \frac{\sigma T_1^4}{\pi} \cdot \frac{dS_1 \cos\beta_1 dS_2 \cos\beta_2}{d^2}.$$

Ce flux est totalement absorbé par dS_2 (corps noir).



Simultanément, dS_2 (à la température T_2) émet en direction de dS_1 :

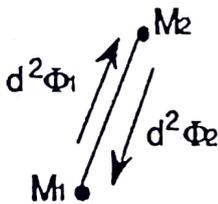
$$\begin{aligned} d^2\Phi_2 &= \frac{\sigma T_2^4}{\pi} \cdot dS_2 \cos\beta_2 d\omega_2 \\ &= \frac{\sigma T_2^4}{\pi} \cdot \frac{dS_1 \cos\beta_1 dS_2 \cos\beta_2}{d^2} \end{aligned}$$

qui est totalement absorbé par dS_1 .

Le bilan de l'échange,

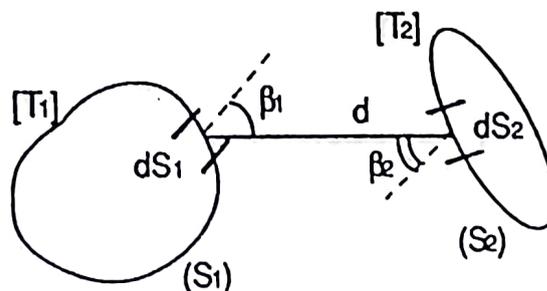
"flux total provenant de dS_1 - flux total provenant de dS_2 " s'écrit simplement ici : flux *net* échangé = $d^2\Phi_{12} = d^2\Phi_1 - d^2\Phi_2$

$$\text{soit } d^2\Phi_{12} = \sigma (T_1^4 - T_2^4) \frac{dS_1 \cos\beta_1 dS_2 \cos\beta_2}{\pi d^2}$$



Remarque :

S'il y avait des flux réfléchis, il conviendrait de les compter dans les flux "provenant" des deux surfaces (voir plus loin)...



Si dS_1 et dS_2 sont des éléments de deux corps noirs (S_1) et (S_2), le flux total échangé entre (S_1) et (S_2) sera obtenu par une double intégration de $d^2\Phi_{12}$:

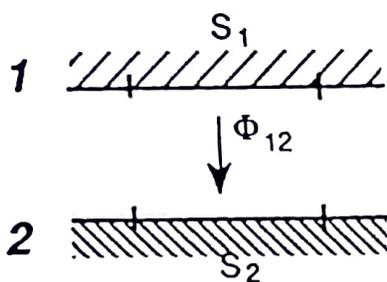
$$\Phi_{12} = \sigma (T_1^4 - T_2^4) \cdot \int_{S_1} \int_{S_2} \frac{dS_1 \cos \beta_1 dS_2 \cos \beta_2}{\pi d^2} \quad (w)$$

Ce flux Φ_{12} représente le flux net qui, *au total*, a été cédé par la surface (S_1) au profit de la surface (S_2).

4.3. Facteurs d'angle

(On les appelle aussi facteurs de forme, ou facteurs de vue).

On voit facilement que, dans le cas de deux plans (noirs) parallèles infinis :



$\Phi_1 = \sigma T_1^4 S_1$ (= flux émis par la surface S_1 de I)

$\Phi_2 = \sigma T_2^4 S_1$ (= flux émis par 2 et absorbé par S_1).

Donc le flux échangé entre dS_1 et le plan 2 s'écrit :

$$\Phi_{12} = \sigma (T_1^4 - T_2^4) S_1$$

$$\text{ou } = \sigma (T_1^4 - T_2^4) S_2, \text{ car } S_1 = S_2.$$

Par analogie, le flux *net* échangé entre deux surfaces *noires* (S_1) et (S_2) peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} \Phi_{12} &= \sigma (T_1^4 - T_2^4) S_1 F_{12} \\ &= \sigma (T_1^4 - T_2^4) S_2 F_{21} \end{aligned}$$

avec :

$$S_1 F_{12} = S_2 F_{21} = \int_{S_1} \int_{S_2} \frac{dS_1 \cos \beta_1 dS_2 \cos \beta_2}{\pi d^2}$$

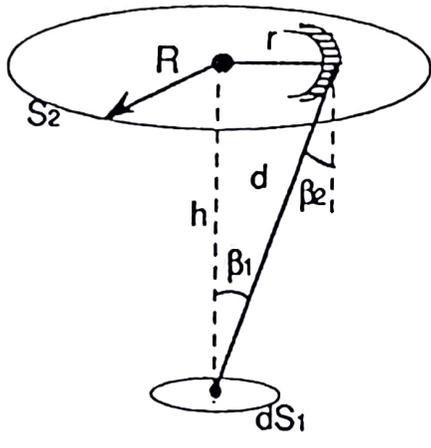
F_{12} et F_{21} sont des quantités sans dimension, purement géométriques, définies par les seules formes et positions respectives des deux surfaces :

F_{12} = "facteur d'angle" sous lequel S_1 "voit" S_2 ,

F_{21} = "facteur d'angle" sous lequel S_2 "voit" S_1 .

Il s'agit maintenant de calculer ces facteurs d'angle.

Exemple de calcul simple :



Un disque S_2 au-dessus d'un élément de surface (parallèle) dS_1 .

$$dS_1 F_{12} = dS_1 \int_{S_2} \frac{\cos \beta_1 \cos \beta_2 dS_2}{\pi d^2}$$

$$\cos \beta_1 = \cos \beta_2 = h/d$$

$$d^2 = r^2 + h^2$$

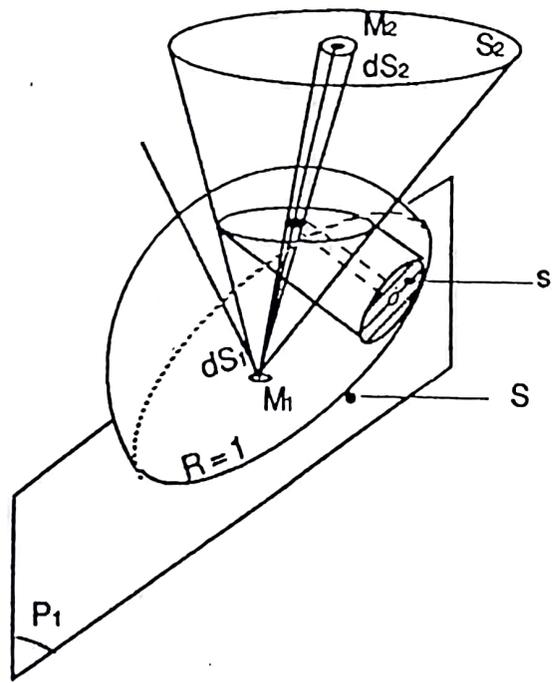
$$dS_2 = 2 \pi r dr$$

$$\text{d'où } F_{12} = \int_0^R \frac{h^2 \cdot 2r dr}{(r^2 + h^2)^2} = \frac{R^2}{h^2 + R^2}$$

(ce que l'on retrouve par la formule 9 plus loin).

Si $R \rightarrow \infty$, $F_{12} \rightarrow 1$ (cf. l'exemple de la surface S_1 devant un plan infini 2, en début de paragraphe).

En général, les calculs deviennent vite très laborieux et on se limitera aux formules établies dans la littérature.



Remarques :

- On peut commodément visualiser, quel que soit S_2 , le facteur d'angle entre la surface élémentaire dS_1 (dans le plan P_1) située en M_1 et la surface S_2 , par le rapport de la surface projetée s à la surface totale S du grand cercle de rayon 1

(cf. le schéma ci-dessus), soit
$$F_{12} = \frac{s}{S} = \frac{s}{\pi}$$

(Si S_2 est infinie et parallèle à dS_1 , s occupera tout le cercle S , et $F_{12} = 1$).

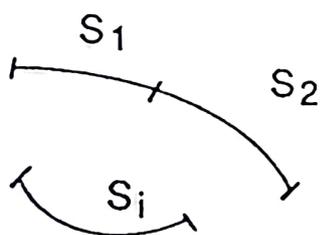
- Si une des deux surfaces est une surface élémentaire (par exemple : dS_1), le calcul revient à faire une seule intégrale sur S_2 , comme dans l'exemple ci-dessus :

$$F_{12}dS_1 = dS_1 \int_{S_2} \frac{\cos\beta_1 dS_2 \cos\beta_2}{\pi d^2}, \text{ d'où } F_{12} = \int_{S_2} \dots$$

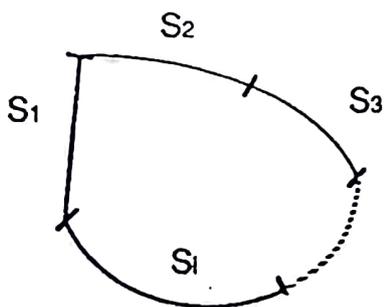
Dans ce cas : $F_{21} = \frac{dS_1}{S_2} F_{12} \Rightarrow 0$. Cela veut dire que S_2 "voit" dS_1 , sous un facteur d'angle nul et "voit" le reste du plan P_1 sous un facteur d'angle égal à $(1 - F_{12})$.

Quand il y a plusieurs surfaces en présence, il convient d'établir les relations existant entre les différents facteurs d'angle.

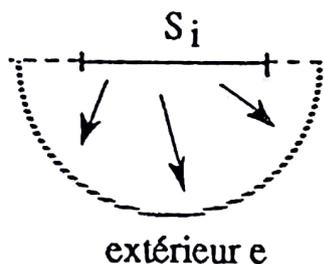
F_{12} représentant en fait la fraction du flux "hémisphérique" émis par S_1 , et qui atteint S_2 ["hémisphérique" = dans le 1/2 espace surplombant S_1], les relations suivantes paraissent évidentes.



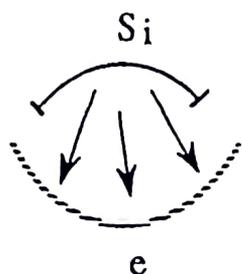
$$F_{i(1+2)} = F_{i1} + F_{i2}$$



$$\sum_{j=1}^n F_{ij} = 1 \quad \text{pour un espace complètement fermé.}$$



$$S_i \quad S_i \text{ est plan (ou convexe)} \quad \begin{array}{l} F_{ii} = 0 \\ F_{ie} = 1 \end{array}$$



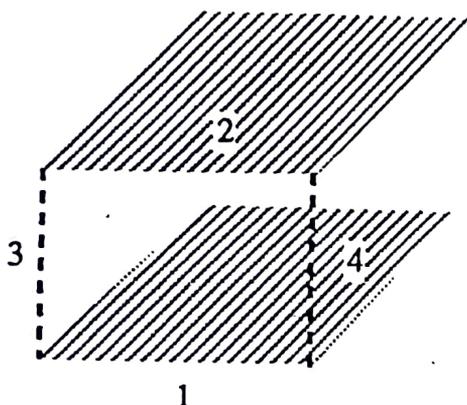
Si Si est concave

$$F_{ii} \neq 0$$

$$F_{ie} < 1$$

et, bien sûr :

$$S_i F_{ij} = S_j F_{ji} \quad (\text{pour chaque paire } (i, j) \text{ de surfaces en présence.})$$



Exemples :

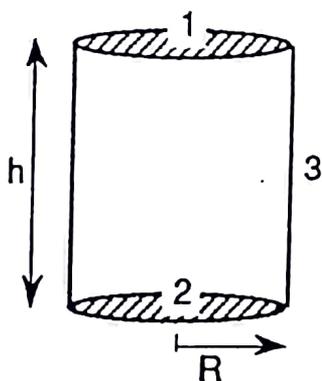
- Supposons que deux plaques parallèles infinies soient telles que $F_{12} = 1/2$ (voir formules plus loin).

Que vaut le facteur d'angle entre 1 et l'ouverture 3 (ou 4) ?

Écrivons les relations fondamentales :

$$F_{13} + F_{12} + F_{14} = 1$$

$$\text{et } F_{13} = F_{14} \quad \left| \text{ donc } F_{13} = 1/4. \right.$$



- Deux disques (rayon R) sont positionnés à une distance h , de sorte que $F_{12} = 1/3$ (voir formules).

Que vaut F_{33} ? (3 est la surface cylindrique qui s'appuie sur les deux disques).

$$F_{12} + F_{13} = 1 \text{ d'où } F_{13} = 2/3$$

$$S_1 F_{13} = S_3 F_{31} \text{ d'où } F_{31} = 2/3 \times S_1/S_3$$

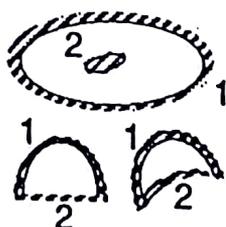
$$F_{32} = F_{31}$$

$$\text{et } F_{31} + F_{32} + F_{33} = 1$$

$$\text{donc } F_{33} = 1 - 2F_{31} = 1 - 4/3 \times S_1/S_3 = 1 - 2R/3h.$$

Nous pouvons donner ici une liste de quelques *formules* utiles permettant de calculer des facteurs d'angle dans des cas simples.

- 1 Une surface convexe (2) à l'intérieur d'une cavité (1) ; ou deux surfaces délimitant un volume clos, l'une n'étant pas concave (2) :



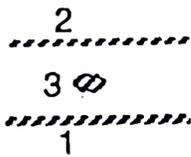
$$F_{21} = 1$$

$$F_{12} = S_2/S_1$$

$$F_{22} = 0$$

$$F_{11} = 1 - S_2/S_1$$

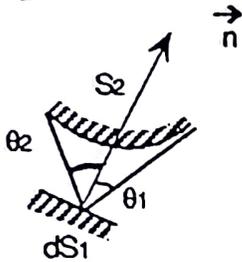
- 2 Une surface convexe (3) entre deux plans parallèles et étendus, la dimension moyenne de (3) étant petite en comparaison de l'écartement des plans :



$$F_{12} = F_{21} = 1 \quad F_{13} = F_{23} = 0$$

$$F_{31} = F_{32} = 1/2$$

- 3 Disposition bidimensionnelle* - une bande étroite (dS_1) et une surface étendue S_2 :

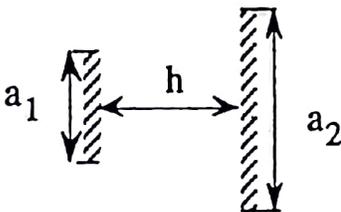


$$F_{12} = (\sin \theta_1 - \sin \theta_2) / 2$$

θ_1 et θ_2 lus à partir de la normale \vec{n} à dS_1 .

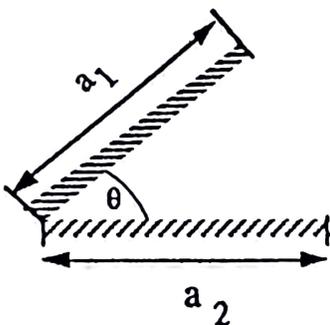
* "bidimensionnelle" = longueur infinie dans la troisième dimension.

- 4 Disposition bidimensionnelle - deux plaques parallèles, de largeurs différentes et ayant le même plan de symétrie :



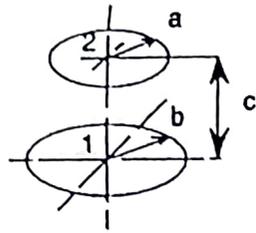
$$F_{12} = \frac{1}{a_1} \left[\sqrt{\frac{1}{4}(a_1 + a_2)^2 + h^2} - \sqrt{\frac{1}{4}(a_1 - a_2)^2 + h^2} \right]$$

- 5 Disposition bidimensionnelle - deux plaques ayant une arête commune et faisant un angle θ :



$$F_{12} = \frac{1}{2a_1} \left[a_1 + a_2 - \sqrt{a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2 \cos \theta} \right]$$

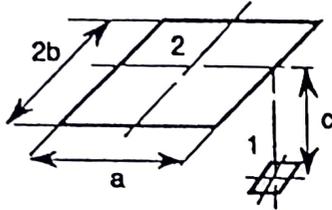
6 Deux disques coaxiaux :



$$X = a/c \quad Y = c/b \quad Z = 1 + (1 + X^2) Y^2$$

$$F_{12} = \frac{1}{2} \left[Z - \sqrt{Z^2 - 4X^2 Y^2} \right]$$

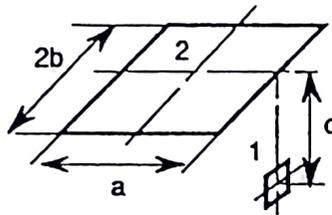
7 Une surface élémentaire parallèle à un rectangle de dimension finie (position selon schéma) :



$$X = a/c \quad Y = b/c$$

$$F_{12} = \frac{1}{\pi} \left[\frac{X}{\sqrt{1+X^2}} \operatorname{Arctg} \left(\frac{Y}{\sqrt{1+X^2}} \right) + \frac{Y}{\sqrt{1+Y^2}} \operatorname{Arctg} \left(\frac{X}{\sqrt{1+Y^2}} \right) \right]$$

8 Une surface élémentaire orthogonale à un rectangle de dimension finie (cf. schéma) :

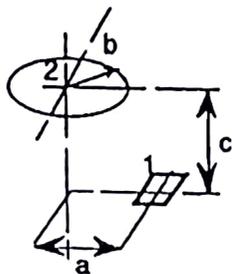


$$X = a/b \quad Y = c/b \quad Z = \frac{1}{\sqrt{X^2 + Y^2}}$$

$$F_{12} = \frac{1}{\pi} \left(\operatorname{Arctg} \frac{1}{Y} - ZY \operatorname{Arctg} Z \right)$$

9 Une surface élémentaire parallèle à un disque (cf. schéma) :

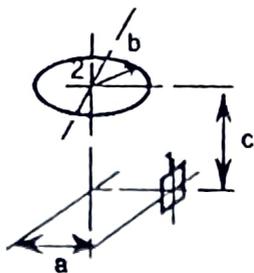
$$X = c/a \quad Y = b/c \quad Z = 1 + (1 + Y^2) X^2$$



$$F_{12} = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{Z - 2Y^2 X^2}{\sqrt{Z^2 - 4Y^2 X^2}} \right]$$

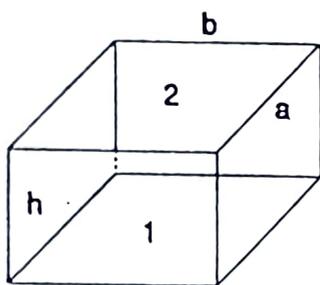
10 Une surface élémentaire orthogonale à un disque (cf. schéma) :

$$a > b \quad X = c/a \quad Y = b/a$$



$$F_{12} = \frac{X}{2} \left[\frac{1 + X^2 + Y^2}{\sqrt{(1 + X^2 + Y^2)^2 - 4Y^2}} - 1 \right]$$

11 Deux rectangles identiques ($a \times b$) parallèles et exactement superposés :

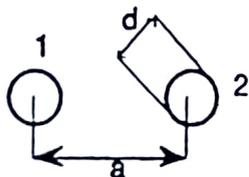


$$F_{12} = \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{a} \sqrt{a^2 + h^2} \operatorname{Arctg} \frac{b}{\sqrt{a^2 + h^2}} + \right.$$

$$\left. \frac{1}{b} \sqrt{b^2 + h^2} \operatorname{Arctg} \frac{a}{\sqrt{b^2 + h^2}} - \frac{h}{a} \operatorname{Arctg} \left(\frac{b}{h} \right) \right.$$

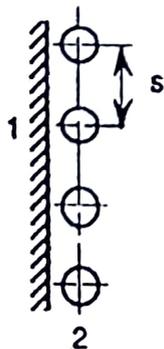
$$\left. - \frac{h}{b} \operatorname{Arctg} \left(\frac{a}{h} \right) + \frac{h^2}{2ab} \ln \frac{(a^2 + h^2)(b^2 + h^2)}{(a^2 + b^2 + h^2)h^2} \right]$$

12 Deux cylindres parallèles, infinis, de même diamètre d , avec une distance entre axes égale à a :



$$F_{12} = \frac{2}{\pi} \left[\operatorname{Arcsin} \left(\frac{d}{a} \right) + \sqrt{\left(\frac{a}{d} \right)^2 - 1} - \frac{a}{d} \right]$$

13 Une rangée de tubes de diamètre d dans un plan parallèle proche d'une paroi, avec un pas s entre tubes :



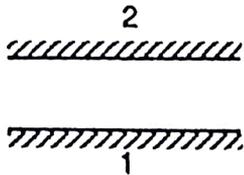
$$F_{12} = 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{d}{s} \right)^2} + \frac{d}{s} \operatorname{Arctg} \sqrt{\left(\frac{s}{d} \right)^2 - 1}$$

$$F_{21} = \frac{1}{\pi} \left[\frac{s}{d} - \sqrt{\left(\frac{s}{d} \right)^2 - 1} + \operatorname{Arctg} \sqrt{\left(\frac{s}{d} \right)^2 - 1} \right]$$

D'autres formules existent mais sont rapidement très volumineuses. Quant à calculer ces intégrales si on ne trouve pas la formule correspondante, il vaut mieux y renoncer au profit d'une méthode numérique.

4.4. Exemples d'échanges radiatifs entre deux surfaces noires

4.4.1. Deux surfaces (noires) parallèles infinies

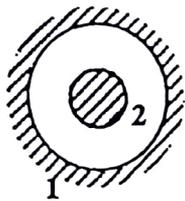


$$F_{12} = F_{21} = 1$$

et

$$\frac{\Phi_{12}}{S} = \sigma (T_1^4 - T_2^4) \quad (\text{W/m}^2)$$

4.4.2. Deux cylindres (noirs) coaxiaux infinis



(cf. formule 1)

$$F_{12} = \frac{S_2}{S_1} \quad \text{et} \quad F_{21} = 1$$

et $\Phi_{12} = S_1 \cdot \frac{S_2}{S_1} \sigma (T_1^4 - T_2^4)$, $\Phi_{12} = \sigma S_2 (T_1^4 - T_2^4)$ (W)

De plus : $\Phi_{21} = -\Phi_{12}$, $\Phi_{11} = \sigma S_1 \left(1 - \frac{S_2}{S_1}\right) (T_1^4 - T_2^4)$,

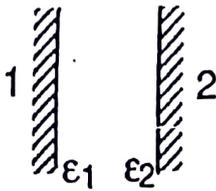
et $\Phi_1 = \Phi_{11} + \Phi_{12} = \sigma S_1 (T_1^4 - T_2^4)$.

4.5. Échanges par rayonnement entre deux surfaces grises opaques séparées par un milieu parfaitement transparent

Le calcul de l'échange est beaucoup plus complexe puisqu'il fait intervenir des réflexions multiples.

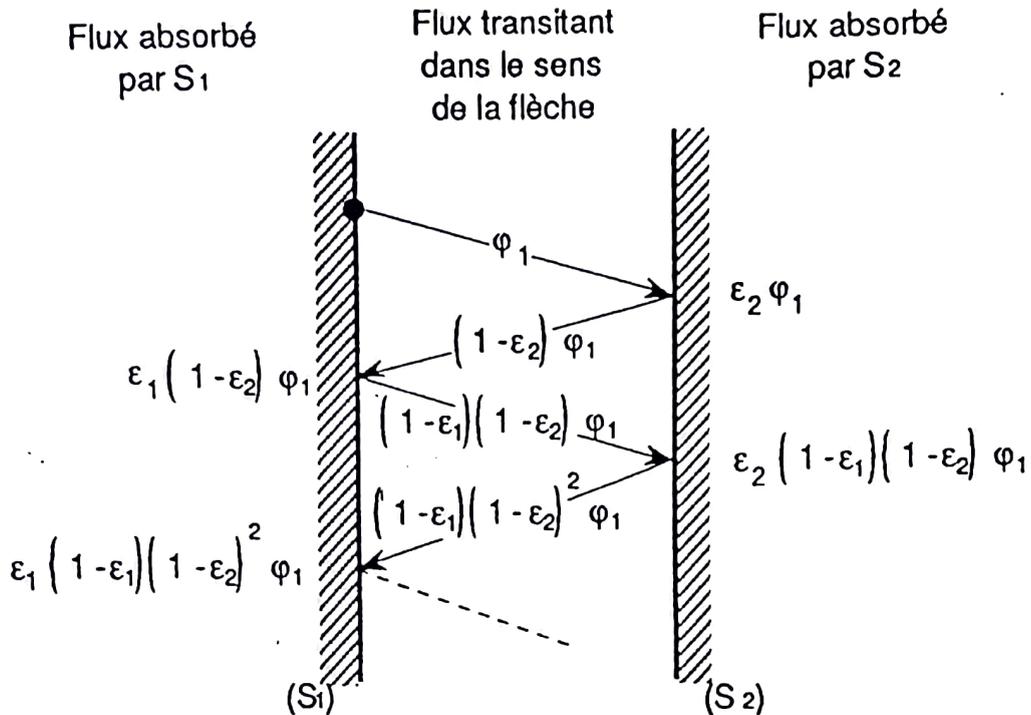
Nous nous appuyerons sur l'exemple simple suivant pour introduire une méthode de calcul (cf. paragraphe 4.5.1., 2^{ème} méthode) "élégante" qui permet commodément l'extension à des cas compliqués : la méthode des "radiosités".

4.5.1. Deux surfaces (grises) parallèles infinies



1^{ère} méthode : elle consiste à calculer l'ensemble des réflexions.

- Si $\varphi_1 (= \varepsilon_1 \sigma T_1^4)$ est le flux émis par m^2 de S_1 , il sera partiellement absorbé par S_2 , le flux réfléchi étant à son tour partiellement absorbé par S_1 , etc.



Calculons $G_1 = \Sigma$ colonne gauche = fraction du flux φ_1 absorbée par S_1 :

$$G_1 = \varepsilon_1 (1 - \varepsilon_2) \varphi_1 [1 + (1 - \varepsilon_1) (1 - \varepsilon_2) + (1 - \varepsilon_1)^2 (1 - \varepsilon_2)^2 + \dots]$$

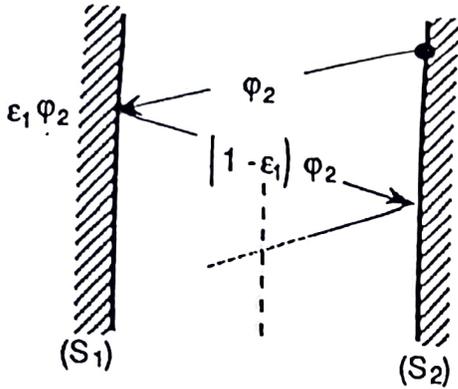
$$= \frac{\varepsilon_1 (1 - \varepsilon_2)}{1 - (1 - \varepsilon_1) (1 - \varepsilon_2)} \varphi_1 \quad (\text{quand le nombre de termes tends vers l'infini}),$$

et $D_1 = \Sigma$ colonne droite = fraction du flux φ_1 absorbée par S_2 :

$$D_1 = \frac{\varepsilon_2}{1 - (1 - \varepsilon_1) (1 - \varepsilon_2)} \varphi_1$$

[Remarque. : $G_1 + D_1$ est naturellement égal à φ_1].

- Si maintenant nous suivons les réflexions de $\varphi_2 (= \varepsilon_2 \sigma T_2^4)$ émis par m^2 de S_2 , nous trouvons :



$G_2 =$ fraction du flux φ_2 absorbée par S_1

$$G_2 = \frac{\varepsilon_1}{1 - (1 - \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_2)} \varphi_2$$

$D_2 =$ fraction du flux φ_2 absorbée par S_2

$$D_2 = \frac{\varepsilon_2(1 - \varepsilon_1)}{1 - (1 - \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_2)} \varphi_2$$

(et $G_2 + D_2 = \varphi_2$).

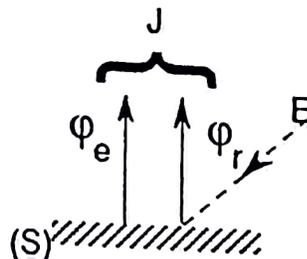
- Au total, S_1 a émis φ_1 et absorbé $(G_1 + G_2)$; le flux de chaleur φ_{12} échangé avec S_2 est donc le solde du bilan : $\varphi_{12} = \varphi_1 - (G_1 + G_2)$. On trouve :

$$\varphi_{12} = \frac{\Phi_{12}}{S_1} = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{1 - (1 - \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_2)} \sigma (T_1^4 - T_2^4) \quad (\text{W/m}^2)$$

Remarquons qu'on trouverait également la même chose en calculant $\varphi_{12} = (D_1 + D_2) - \varphi_2$, ou encore la somme des flux allant de gauche à droite moins ceux allant de droite à gauche entre les plans (S_1) et (S_2) .

Cet exemple montre que ce type de calculs nécessite un très grand soin et devient vite extrêmement lourd.

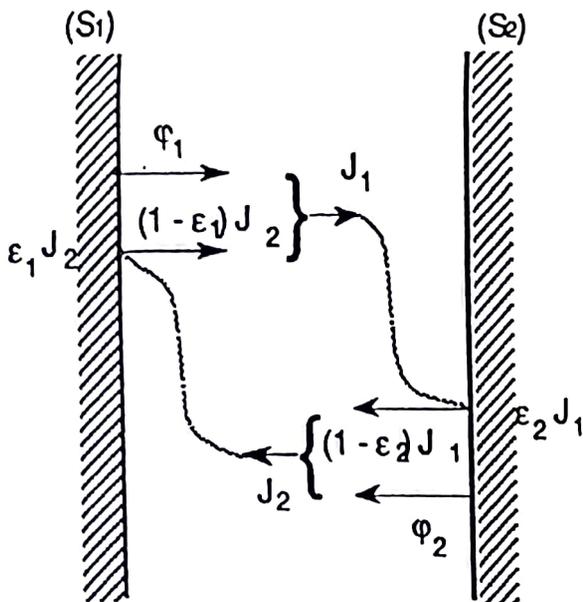
2ème méthode : elle consiste à raisonner "globalement" en utilisant la notion de "RADIOSITE" évoquée au paragraphe 1.



On appelle *radiosité* J la somme du flux φ_e émis par la surface (S) et de l'ensemble φ_r des flux réfléchis sur la surface (S) . J est donc le flux *total* provenant de (S) , et s'exprime en W/m^2 : $J = \varphi_e + \varphi_r$.

$$\left| \begin{array}{l} \varphi_e = \varepsilon \sigma T^4 \\ \varphi_r = (1 - \varepsilon) E, \end{array} \right.$$

E étant l'éclairement de la surface (S) tel que défini au paragraphe 2.2.1.



Ici, pour (S₁) :

$$\varphi_e = \varphi_1 = \varepsilon_1 \sigma T_1^4$$

$$\varphi_r = (1 - \varepsilon_1) J_2$$

(en effet, J₂ constitue l'éclairement de S₁, et, bien sûr, J₁ est l'éclairement de S₂).

Donc :

$$J_1 = \varphi_1 + (1 - \varepsilon_1) J_2$$

et $J_2 = \varphi_2 + (1 - \varepsilon_2) J_1$

La résolution de ces deux équations symétriques du premier degré donne :

$$J_1 = \frac{\varphi_1 + (1 - \varepsilon_1) \varphi_2}{1 - (1 - \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_2)} \quad \text{et} \quad J_2 = \frac{(1 - \varepsilon_2) \varphi_1 + \varphi_2}{1 - (1 - \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_2)}$$

Le flux φ_{12} (W/m²) échangé entre S₁ et S₂ peut s'écrire :

φ_{12} = "flux quittant S₁ - flux arrivant sur S₁",

soit :

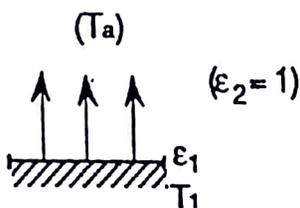
$$\varphi_{12} = J_1 - J_2 = \frac{\varepsilon_2 \varphi_1 - \varepsilon_1 \varphi_2}{1 - (1 - \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_2)} = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{1 - (1 - \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_2)} \sigma (T_1^4 - T_2^4)$$

ce qui est le résultat déjà trouvé par la première méthode.

On aurait aussi pu écrire :

φ_{12} = "flux émis par S₁ - flux absorbé par S₁",

= $\varphi_1 - \varepsilon_1 J_2$, ce qui donne le même résultat.

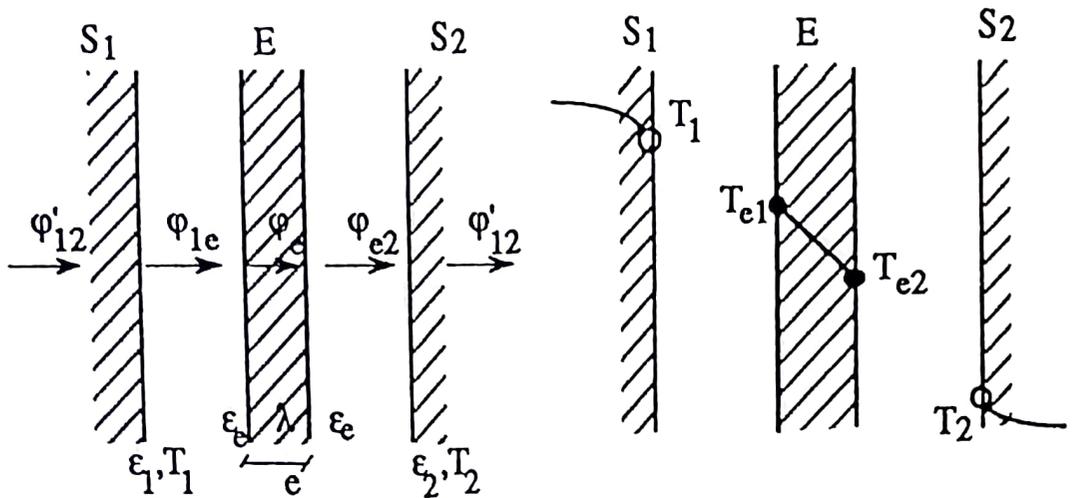


En particulier, si l'une des surfaces est *noire* [ce serait, par exemple, le cas de la surface enveloppe d'un four (ε_1, T_1) rayonnant dans un hall ($\varepsilon_2 = 1, T_a$)], on obtient :

$$\varphi_{12} = \frac{\Phi_{12}}{S_1} = \varepsilon_1 \sigma (T_1^4 - T_a^4) \quad (\text{W/m}^2)$$

Exemple : problème de l'écran

On insère entre deux plans (à T_1 et T_2) un écran. Quelles seront la température de ce dernier et la nouvelle valeur du flux échangé, en régime permanent ?



- Caractéristiques des plans (voir schéma)

- L'écran :

émissivité : ε_e

épaisseur : e

conductivité : λ

$$\text{Sans écran, on aurait : } \varphi_{12} = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{1 - (1 - \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_2)} \sigma (T_1^4 - T_2^4)$$

$$\text{Avec écran : } \varphi'_{12} = \varphi_{1e} = \varphi_e = \varphi_{e2} = \varphi'_{12}$$

$$\text{soit } \varphi'_{12} = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_e \sigma (T_1^4 - T_{e1}^4)}{1 - (1 - \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_e)}$$

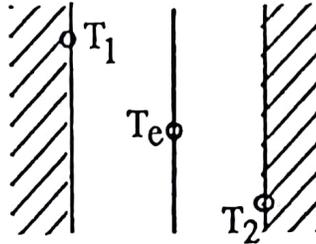
$$= \frac{\lambda}{e} (T_{e1} - T_{e2})$$

$$= \frac{\varepsilon_e \varepsilon_2 \sigma (T_{e2}^4 - T_2^4)}{1 - (1 - \varepsilon_e)(1 - \varepsilon_2)}$$

On a ainsi trois équations à trois inconnues (T_{e1} , T_{e2} , φ'_{12}) à résoudre, par tâtonnement.

Si $e \approx 0$, on aura : $T_{e1} = T_{e2} = T_e$ et

$$\varphi''_{12} = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_e \sigma (T_1^4 - T_e^4)}{1 - (1 - \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_e)} = \frac{\varepsilon_e \varepsilon_2 \sigma (T_e^4 - T_2^4)}{1 - (1 - \varepsilon_e)(1 - \varepsilon_2)}, \text{ ce qui permet le calcul de } T_e \text{ et } \varphi''_2.$$



Par exemple, si, de plus, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$, alors :

$$T_e^4 = \frac{T_1^4 + T_2^4}{2}$$

$$\text{et } \varphi''_{12} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon \varepsilon_e \sigma (T_1^4 - T_2^4)}{1 - (1 - \varepsilon)(1 - \varepsilon_e)}$$

qui correspond à la moitié de φ_{12} , dans le cas où $\varepsilon_e = \varepsilon$, etc.

4.5.2. Deux surfaces (grises) limitées fermant tout l'espace

Remarque :

Si les deux surfaces S_1 et S_2 sont en vis à vis comme dans le schéma A, il faudrait considérer une surface S_3 , fictive, qui formerait, avec S_1 et S_2 , une enceinte. S_3 contribuerait alors à l'ensemble des échanges de chaleur, comme nous le verrons au paragraphe 4.6.

Schéma A

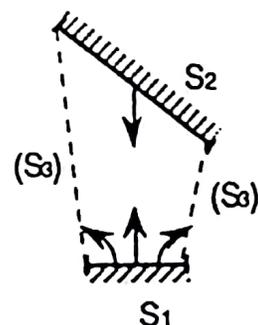
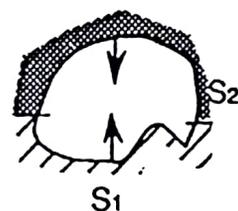
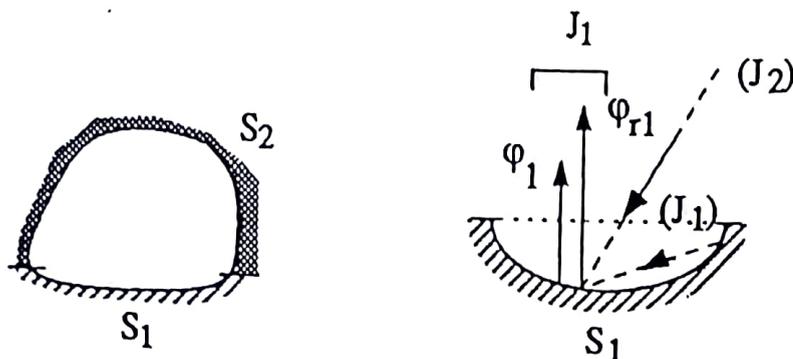


Schéma B



Ce que nous disons ci-dessous ne correspond qu'au schéma B, où l'espace est totalement fermé par S_1 et S_2 .

- Reprenons la méthode des *radiosités* dans ce cas (cf. paragraphe 4.5.1., 2^{ème} méthode) :



J_1 (= radiosité de S_1), flux total quittant S_1 , se compose :

- du flux φ_1 émis par S_1 ;
- et du flux φ_{r1} réfléchi par S_1 ; ce dernier, dans le cas où S_1 est *concave*, provient partiellement de S_1 elle-même et de S_2 .

Le flux total (en watts) quittant S_1 s'écrit donc :

$$S_1 J_1 = S_1 \varphi_1 + (1 - \varepsilon_1) [F_{11} S_1 J_1 + F_{21} S_2 J_2]$$

et comme $F_{21} S_2 = F_{12} S_1$,

$$\text{on obtient : } J_1 = \varphi_1 + (1 - \varepsilon_1) [F_{11} J_1 + F_{12} J_2],$$

$$\text{de même : } J_2 = \varphi_2 + (1 - \varepsilon_2) [F_{21} J_1 + F_{22} J_2].$$

Remarquons que la deuxième équation s'obtient par permutation des indices 1 et 2 de la première.

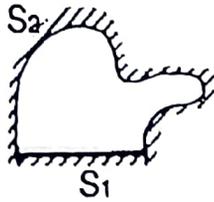
Cet ensemble de 2 équations du 1^{er} degré à deux inconnues fournit J_1 et J_2 (expressions assez volumineuses et de peu d'intérêt ici).

- Une fois les radiosités J_1 et J_2 connues, on calcule le flux échangé entre S_1 et S_2 par :

$$\Phi_{12} = F_{12} S_1 J_1 - F_{21} S_2 J_2 = F_{12} S_1 (J_1 - J_2)$$

On trouve :

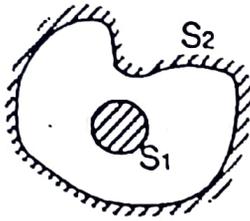
$$\frac{\Phi_{12}}{S_1} = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{1 - \left(1 - \varepsilon_1 \frac{S_1}{S_2}\right) (1 - \varepsilon_2) + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \frac{F_{11}}{F_{12}}} \sigma (T_1^4 - T_2^4) \quad (\text{W/m}^2)$$



Exemples :

$S_1 = \text{plan}$,

$S_2 = \text{cavité de forme quelconque}$.



$S_1 = \text{solide convexe}$,

$S_2 = \text{solide concave entourant complètement } S_1 \text{ (ex. : deux cylindres, deux sphères, etc.)}$.



Plans parallèles infinis.



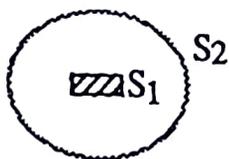
Tous ces cas particuliers sont du ressort de la formule ci-dessus avec $F_{11} = 0$ et $F_{12} = 1$, d'où :

$$\frac{\Phi_{12}}{S_1} = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{1 - \left(1 - \varepsilon_1 \frac{S_1}{S_2}\right) (1 - \varepsilon_2)} \sigma (T_1^4 - T_2^4) \quad (\text{W/m}^2)$$

(pour les plans parallèles infinis, on a bien sûr : $S_1/S_2 = 1$).

Ces derniers calculs sont applicables quels que soient S_1 et S_2 pourvu que S_2 ferme totalement l'espace vu par S_1 , et que S_1 soit convexe.

On notera tout particulièrement que si la surface extérieure S_2 est *noire* ($\varepsilon_2 = 1$) ou *très grande* ($S_1/S_2 \rightarrow 0$), l'expression se réduit à :



$$\Phi_{12} = \varepsilon_1 S_1 \sigma (T_1^4 - T_2^4) \quad (\text{W})$$

Cela revient à dire que si un petit corps est placé dans une grande enceinte, cette dernière se comporte comme une surface noire.

Exemples :

Petite charge dans un grand four.

Four dans un hall.

Refroidissement d'une pièce chaude à l'air libre

($T_2 = T_{\text{ambiante}}$) : cf. partie 4a paragraphe 1.3.

Remarque :

L'ensemble des équations utilisées pour ces calculs peut se schématiser par :

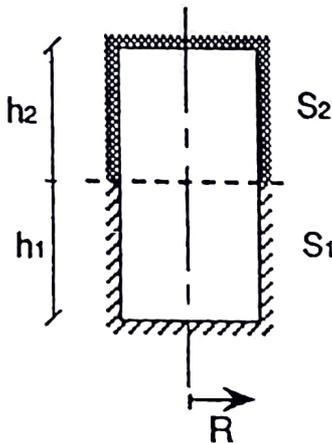
$$J_1 = A \sigma T_1^4 + B \sigma T_2^4,$$

$$J_2 = C \sigma T_1^4 + D \sigma T_2^4,$$

$$\Phi_{12} = E J_1 + F J_2.$$

Dans notre exemple, T_1 et T_2 sont connus et on calcule J_1 , J_2 et Φ_{12} . On peut très bien se donner T_1 et Φ_{12} et calculer J_1 , J_2 et T_2 . Cette remarque est valable pour l'ensemble des calculs de ce paragraphe.

(Par exemple : une paroi adiabatique $\rightarrow \Phi_{12} = 0$, etc.).



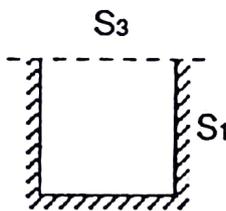
Exemple :

Deux cylindres ouverts, en vis à vis (rayon R)

$$S_1 : \varepsilon_1, T_1$$

$$S_2 : \varepsilon_2, T_2$$

On va d'abord calculer F_{11} et F_{12} puis le flux échangé entre le cylindre 1 et le cylindre 2.



Au lieu de procéder à une intégration difficile, le calcul de F_{11} et F_{12} est accessible en faisant intervenir la surface fictive S_3 qui ferme le demi-espace de S_1 (et de S_2), car on comprend que $F_{12} = F_{13}$.

On a :

$$F_{13} S_1 = F_{31} S_3,$$

$$F_{31} = 1 \text{ d'où } F_{13} = S_3/S_1,$$

$$F_{11} + F_{13} = 1 \text{ d'où } F_{11} = 1 - S_3/S_1,$$

$$F_{12} = F_{13} \text{ d'où } F_{12} = S_3/S_1,$$

$$\text{avec } S_3 = \pi R^2 \quad \text{et} \quad S_1 = 2 \pi R h_1 + \pi R^2.$$

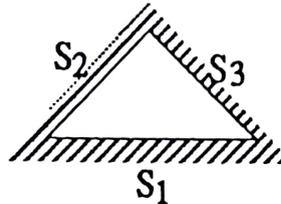
Ayant calculé F_{11} et F_{12} , on applique la formule du paragraphe 4.5.2. qui donne Φ_{12} .

Remarquons ici que $\Phi_{21} = -\Phi_{12}$, ce qu'on peut vérifier en intervertissant les indices 1 et 2.

4.6. Échanges par rayonnement entre une surface (grise) et plusieurs surfaces (grises) opaques formant une enceinte fermée

C'est l'extension du cas précédent au cas où la surface S_1 est soumise au rayonnement de plusieurs surfaces différentes (par ex. la sole d'un four avec les différentes parois).

4.6.1. Trois surfaces planes



Pour simplifier, traitons d'abord le cas d'une enceinte triangulaire. L'extension des formules des paragraphes 4.5.1. et 4.5.2. est immédiate.

$$\begin{cases} J_1 = \varphi_1 + (1 - \varepsilon_1) [F_{12} J_2 + F_{13} J_3] \\ J_2 = \varphi_2 + (1 - \varepsilon_2) [F_{21} J_1 + F_{23} J_3] \\ J_3 = \varphi_3 + (1 - \varepsilon_3) [F_{31} J_1 + F_{32} J_2] \end{cases}$$

On obtient un système de 3 équations du 1^{er} degré à 3 inconnues qui fournit J_1 , J_2 et J_3 .

Les flux échangés par S_1 se calculent alors par :

$$\begin{cases} \Phi_{12} = F_{12} S_1 (J_1 - J_2) \\ \Phi_{13} = F_{13} S_1 (J_1 - J_3) \\ \Phi_{1,23} = S_1 (J_1 - F_{12} J_2 - F_{13} J_3) = \Phi_{12} + \Phi_{13} \end{cases}$$

et les autres, par permutation des indices.

4.6.2. Trois surfaces concaves

On écrira :

$$J_1 = \varphi_1 + (1 - \varepsilon_1) [F_{11} J_1 + F_{12} J_2 + F_{13} J_3]$$

etc.

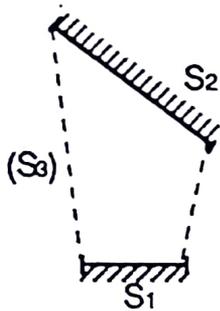
et on développera des calculs semblables à ceux du paragraphe 4.6.1.

4.6.3. *n surfaces concaves*

C'est le cas le plus général.

$$J_i = \varphi_i + (1 - \varepsilon_i) \sum_{j=1}^n F_{ij} J_j \quad (\text{pour } i = 1 \text{ à } n), \text{ ce qui donne } n \text{ équations du}$$

1^{er} degré à n inconnues, et $\Phi_{ij} = F_{ij} S_i (J_i - J_j)$.

4.6.4. *Quelques exemples*

- a) Deux *surfaces planes en vis à vis* dans le *vide*.
C'est le schéma A) du paragraphe 4.5.2. S_3 représente ici le "vide", caractérisé par
 $T_3 = 0$ (degré K)
 $\varepsilon_3 = 1$ (corps noir)
 De plus, $F_{11} = F_{22} = 0$

- Calcul des radiosités

$$\begin{cases} J_1 = \varphi_1 + (1 - \varepsilon_1) [F_{12} J_2 + F_{13} J_3] \\ J_2 = \varphi_2 + (1 - \varepsilon_2) [F_{21} J_1 + F_{23} J_3] \\ J_3 = \varphi_3 + (1 - \varepsilon_3) [F_{31} J_1 + F_{32} J_2] = 0 \end{cases}$$

soit, ici : $J_1 = \varepsilon_1 \sigma T_1^4 + (1 - \varepsilon_1) F_{12} J_2$
 et $J_2 = \varepsilon_2 \sigma T_2^4 + (1 - \varepsilon_2) F_{21} J_1$,

d'où $J_1 = \frac{\varepsilon_1 \sigma T_1^4 + (1 - \varepsilon_1) F_{12} \varepsilon_2 \sigma T_2^4}{1 - (1 - \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_2) F_{12} F_{21}}$,

et $J_2 = \frac{(1 - \varepsilon_2) F_{21} \varepsilon_1 \sigma T_1^4 + \varepsilon_2 \sigma T_2^4}{1 - (1 - \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_2) F_{12} F_{21}}$.

- Calcul des flux :

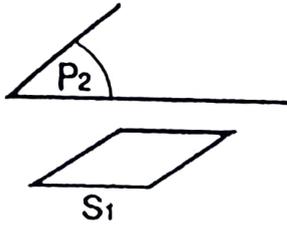
$$\Phi_{12} = F_{12} S_1 (J_1 - J_2)$$

$$\Phi_{12} = F_{12} S_1 \frac{[1 - (1 - \varepsilon_2) F_{21}] \varepsilon_1 \sigma T_1^4 - [1 - (1 - \varepsilon_1) F_{12}] \varepsilon_2 \sigma T_2^4}{1 - (1 - \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_2) F_{12} F_{21}}$$

et $\Phi_{1,23} = S_1 (J_1 - F_{12} J_2 - F_{13} J_3)$ etc.

On remarque que si $T_1 = T_2$, on obtient $\Phi_{12} \neq 0$, ce qui peut surprendre et paraître contraire au "deuxième principe". Ce résultat est cependant exact. Φ_{12} serait égal à zéro si $T_1 = T_2 = T_3$.

En revanche, si $T_1 = T_2$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ et $F_{12} = F_{21}$, le problème devient symétrique (deux plaques identiques en vis à vis), et $\Phi_{12} = 0$.



Exemple :

$P_2 = \text{Plan infini}$

$S_1 = \text{surface finie}$

$F_{12} = 1 \quad F_{21} = S_1/S_2 \cdot 1 \rightarrow 0$

Le calcul des radiosités se réduit à :

$$\begin{cases} J_1 = \varepsilon_1 \sigma T_1^4 + (1 - \varepsilon_1) J_2 \\ J_2 = \varepsilon_2 \sigma T_2^4 \end{cases}$$

$$\text{et } \Phi_{12} = S_1 (J_1 - J_2) = \varepsilon_1 S_1 \sigma (T_1^4 - \varepsilon_2 T_2^4).$$

- b) *Deux surfaces planes en vis à vis dans une pièce à la température ambiante.*

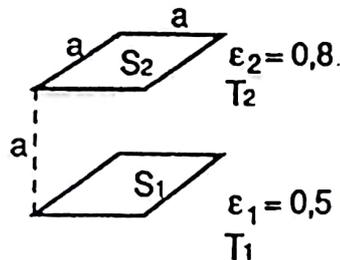
C'est le même jeu d'équations que dans l'exemple a), mais avec :

$$T_3 \approx 300 \text{ K} \quad (27^\circ\text{C})$$

$$\varepsilon_3 = 1.$$

Ici, $J_3 \neq 0$, et le calcul des radiosités fait intervenir les trois équations présentées au paragraphe 4.6.1.

- c) *Deux faces d'un cube rayonnant entre elles dans le vide (les autres faces étant absentes).*



L'application de la formule 11 du paragraphe 4.3. donne :

$$\begin{aligned} F_{12} &= \frac{2}{\pi} \left[2\sqrt{2} \operatorname{Arctg} \frac{1}{\sqrt{2}} - 2 \operatorname{Arctg} 1 + \frac{1}{2} \ln \frac{4}{3} \right] \\ &\approx 0,2 \quad = F_{21} \end{aligned}$$

$$J_1 = \varphi_1 + (1 - 0,5) \times 0,2 J_2 = \varphi_1 + 0,1 J_2$$

$$J_2 = \varphi_2 + (1 - 0,8) \times 0,2 J_1 = \varphi_2 + 0,04 J_1$$

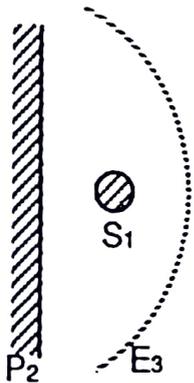
$$\text{avec } \varphi_1 = \varepsilon_1 \sigma T_1^4 \quad \text{et} \quad \varphi_2 = \varepsilon_2 \sigma T_2^4.$$

$$\text{Soit } J_1 = \frac{\varphi_1 + 0,1\varphi_2}{0,996} \quad \text{et} \quad J_2 = \frac{\varphi_2 + 0,04\varphi_1}{0,996}$$

$$\text{d'où } \Phi_{12} = F_{12} S_1 [J_1 - J_2],$$

$$\text{et } \frac{\Phi_{12}}{a^2} = 0,2 \frac{0,96 \varphi_1 - 0,9 \varphi_2}{0,996} = \frac{0,096 \sigma T_1^4 - 0,144 \sigma T_2^4}{0,996} \quad (\text{W/m}^2).$$

d) Un *thermocouple devant une paroi infinie*



Le thermocouple est représenté par la sphère S_1 (ε_1, T_1). Le plan P_2 (ε_2, T_2) occupe la moitié de l'espace visible par la surface S_1 .

$$\text{Donc : } F_{12} = 1/2 \quad \text{et} \quad F_{21} = 0.$$

Mais S_1 échange aussi avec l'espace E_3 ($T_3 = 0, \varepsilon_3 = 1$) d'où provient le flux $\varphi_3 = 0$ (si on est dans le vide). D'où : $F_{13} = 1/2$ et $J_3 = 0$.

Les équations de radiosités deviennent :

$$\begin{cases} J_1 = \varphi_1 + (1 - \varepsilon_1) \times 1/2 J_2, \\ J_2 = \varphi_2 \end{cases}$$

$$\text{d'où : } J_1 = \varphi_1 + \frac{(1 - \varepsilon_1)}{2} \varphi_2$$

$$\text{et } \Phi_{12} = \frac{1}{2} S_1 (J_1 - J_2) = \frac{1}{2} S_1 \left[\varphi_1 - \frac{1 + \varepsilon_1}{2} \varphi_2 \right].$$

$$\text{De même, } \Phi_{13} = \frac{1}{2} S_1 (J_1 - J_3) = \frac{1}{2} S_1 \left[\varphi_1 + \frac{1 - \varepsilon_1}{2} \varphi_2 \right]$$

La température d'équilibre du thermocouple sera telle que le flux total échangé ($\Phi_{12} + \Phi_{13}$) soit nul, ce qui donne :

$$2 \varphi_1 - \varepsilon_1 \varphi_2 = 0$$

et

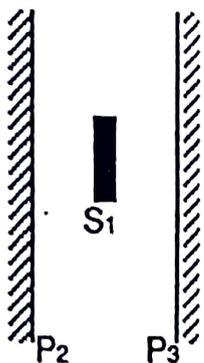
$$T_1^4 = \frac{\varepsilon_2}{2} T_2^4$$

Cette température lue dépend bien sûr de ε_2 , mais pas de l'émissivité ε_1 du thermocouple. Si $\varepsilon_2 = 1$, cela donne : $T_1^4 = T_2^4 / 2$

Notons que si le thermocouple avait été représenté par une petite surface S_1 , parallèle à P_2 , le résultat aurait été strictement identique (de même que pour S_1 quelconque).

Ce calcul explique pourquoi la lecture d'un thermocouple "posé" sur une surface est fautive.

e) Un thermocouple entre deux plans



Représentons le thermocouple par une petite surface S_1 irradiée d'un côté ($S_1/2$) par P_2 , de l'autre ($S_1/2$) par P_3 .

$$\text{On a } F_{12} = F_{13} = 1/2 \\ F_{23} = F_{32} = 1 \quad \text{et } F_{21} = F_{31} = 0.$$

$$\begin{cases} J_1 = \varphi_1 + \frac{(1 - \varepsilon_1)}{2} (J_2 + J_3) \\ J_2 = \varphi_2 + (1 - \varepsilon_2) J_3 \\ J_3 = \varphi_3 + (1 - \varepsilon_3) J_2 \end{cases}$$

$$\text{et } \Phi_{1,23} = S_1 \left[J_1 - \frac{(J_2 + J_3)}{2} \right] = 0 \quad \text{à l'équilibre,}$$

$$\text{d'où } J_1 = \frac{J_2 + J_3}{2} \quad \text{ce qui peut paraître évident ;}$$

$$\text{donc : } \varphi_1 + \frac{1-\varepsilon_1}{2} (J_2 + J_3) = \frac{1}{2} (J_2 + J_3)$$

$$\text{ou } \varphi_1 = \frac{\varepsilon_1}{2} (J_2 + J_3),$$

$$\text{et, avec } J_2 = \frac{\varphi_2 + (1-\varepsilon_2)\varphi_3}{1-(1-\varepsilon_2)(1-\varepsilon_3)} \text{ et } J_3 = \frac{\varphi_3 + (1-\varepsilon_3)\varphi_2}{1-(1-\varepsilon_2)(1-\varepsilon_3)},$$

$$\text{on trouve } \varphi_1 = \varepsilon_1 \frac{\varphi_2 + \varphi_3 - (\varepsilon_2\varphi_3 + \varepsilon_3\varphi_2) \frac{1}{2}}{1-(1-\varepsilon_2)(1-\varepsilon_3)}.$$

En remplaçant φ_1 , φ_2 et φ_3 par leurs valeurs, $\varphi_1 = \varepsilon_1 \sigma T_1^4$, $\varphi_2 = \varepsilon_2 \sigma T_2^4$, $\varphi_3 = \varepsilon_3 \sigma T_3^4$, on arrive à :

$$T_1^4 = \frac{\varepsilon_2 T_2^4 + \varepsilon_3 T_3^4 - \frac{\varepsilon_2 \varepsilon_3}{2} (T_2^4 + T_3^4)}{1-(1-\varepsilon_2)(1-\varepsilon_3)}$$

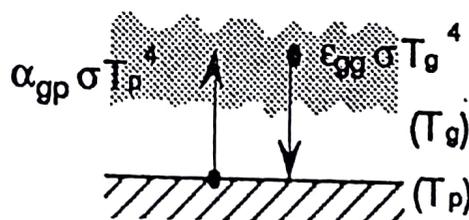
C'est la température d'équilibre du thermocouple. Si les deux plans sont à la même température ($T_2 = T_3$), on obtient $T_1 = T_2 = T_3$ quels que soient ε_2 et ε_3 .

On comprend qu'un tel calcul peut être facilement étendu au cas d'une enceinte parallélépipédique (6 faces différentes).

4.7. Échanges par rayonnement entre deux surfaces grises opaques séparées par un milieu semi-transparent

Le cas est de grande importance pratique, puisque c'est, par exemple, celui de l'échange entre des gaz rayonnants chauds et les parois du four qui les contiennent et supportent la charge utile à chauffer. C'est aussi malheureusement un des plus difficiles à résoudre et nous nous bornerons à quelques exemples de résultats à titre indicatif.

4.7.1. Échange entre une paroi et un gaz



- Paroi *noire*. On écrit que le flux émis par le gaz (ϵ_{gg} calculé à la température T_g) moins le flux absorbé par le gaz (α_{gp} calculé à la température T_p) est égal au flux échangé avec la paroi.

$$\Phi_{gp} = \sigma [\epsilon_{gg} T_g^4 - \alpha_{gp} T_p^4] \quad (\text{W/m}^2)$$

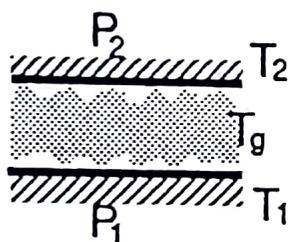
Pour le calcul de ϵ_{gp} et α_{gp} , se reporter au paragraphe 3.

- Paroi *grise* (ϵ_p) :

$$\Phi_{gp} = [1 - \alpha_{gg} (1 - \epsilon_p)] \epsilon_{gg} \sigma T_g^4 - \alpha_{gp} \epsilon_p \sigma T_p^4$$

$$\Phi_{pg} = \epsilon_p \sigma [T_p^4 - \epsilon_{gg} T_g^4].$$

4.7.2. Échange entre deux parois parallèles infinies séparées par un gaz



Quelques formules sont calculables dans les cas les plus simples :

[α_{gi} calculé à la température T_i]

- 2 parois *noires* :

$$\Phi_1 = \sigma [\epsilon_{gg} T_g^4 + (1 - \alpha_{g2}) T_2^4 - T_1^4] \text{ reçu par } P_1, \quad (\text{W/m}^2)$$

$$\Phi_2 = \sigma [\epsilon_{gg} T_g^4 + (1 - \alpha_{g1}) T_1^4 - T_2^4] \text{ reçu par } P_2,$$

$$\Phi_g = \sigma [2 \epsilon_{gg} T_g^4 - \alpha_{g1} T_1^4 - \alpha_{g2} T_2^4] \text{ cédé par le gaz.}$$

On a bien : $\Phi_g = \Phi_1 + \Phi_2$.

- 2 parois *grises*, gaz *gris*
(on suppose $\alpha_g = \epsilon_g$)

Si on pose :

E_1 = flux total arrivant sur P_1 (éclairage), par unité de surface

J_1 = " " quittant P_1 (radiosité)

E_2 = " " arrivant sur P_2

J_2 = " " quittant P_2

$$E_1 = (1 - \epsilon_g) J_2 + \epsilon_g \sigma T_g^4 \quad (\text{W/m}^2)$$

$$J_1 = (1 - \epsilon_1) E_1 + \epsilon_1 \sigma T_1^4$$

$$E_2 = (1 - \epsilon_g) J_1 + \epsilon_g \sigma T_g^4$$

$$J_2 = (1 - \epsilon_2) E_2 + \epsilon_2 \sigma T_2^4.$$

Le flux échangé par P_1 avec P_2 et avec le gaz est : $\varphi_I = J_1 - E_1$.

On trouve, en séparant la contribution de T_2 et celle de T_g :

$$\varphi_1 = \epsilon_1 \sigma \frac{\epsilon_2 (1 - \epsilon_g) [T_1^4 - T_2^4] + \epsilon_g [1 + (1 - \epsilon_g)(1 - \epsilon_2)] [T_1^4 - T_g^4]}{1 - (1 - \epsilon_g)^2 (1 - \epsilon_1)(1 - \epsilon_2)}$$

- Pour $T_g = T_1 = T_2$, on retrouve $\varphi_1 = 0$.

- Pour $T_g = T_2$, on a $\varphi_1 = \epsilon_1 \sigma \frac{[1 - (1 - \epsilon_g)^2 (1 - \epsilon_2)] [T_1^4 - T_2^4]}{1 - (1 - \epsilon_g)^2 (1 - \epsilon_1)(1 - \epsilon_2)}$

et si $\epsilon_2 = 1$, on retrouve $\varphi_1 = \epsilon_1 \sigma (T_1^4 - T_2^4)$ (flux échangé entre un corps gris et un corps noir).

- Pour obtenir φ_2 , il suffit d'intervertir les indices 1 et 2 :

on constate que $\varphi_2 \neq -\varphi_1$.

- Le flux échangé par le gaz avec P_1 et P_2 est $\varphi_g = \varphi_1 + \varphi_2$:

$$\varphi_g = \epsilon_g \sigma \frac{\epsilon_1 [1 + (1 - \epsilon_g)(1 - \epsilon_2)] [T_1^4 - T_g^4] + \epsilon_2 [1 + (1 - \epsilon_g)(1 - \epsilon_1)] [T_2^4 - T_g^4]}{1 - (1 - \epsilon_g)^2 (1 - \epsilon_1)(1 - \epsilon_2)}$$

4.7.3. Échange dans une enceinte grise contenant un gaz gris - Calcul de l'épaisseur équivalente de gaz

Les calculs deviennent vite inextricables ...

Que ce soit pour 2 plans parallèles ou pour une enceinte de forme quelconque, on sera appelé à calculer ϵ_g et α_g en tenant compte d'une épaisseur L de gaz traversé en moyenne par le rayonnement dans toutes les directions.

On utilisera donc, dans le cas d'une atmosphère CO₂ - H₂O, les diagrammes des paragraphes 3.4.1. et 3.4.2. en se servant du paramètre $PL_{\text{éq.}}$, avec :

<i>Forme de l'enceinte</i>	<i>L_{éq}</i>
Sphère de diamètre D	0,6 D
Cylindre long rayonnant par sa surface latérale ou suivant son axe (diam. D)	0,9 D
Cube d'arête a	0,6 a
Plans parallèles d'écartement e	1,8 e

Si l'on ne possède pas la longueur équivalente pour l'enceinte considérée, on peut prendre en première approximation :

$$L_{\text{éq.}} = 3,6 \times \frac{V}{S} \quad \frac{\text{(volume de l'enceinte)}}{\text{(surface enveloppe)}}$$

5. Quelques conclusions sur les échanges par rayonnement

Les difficultés rencontrées dans le traitement des problèmes d'échange par rayonnement sont multiples :

- la formulation devient vite inabordable lorsque la géométrie des systèmes en présence se complique quelque peu (facteurs d'angle) ou lorsqu'on abandonne l'hypothèse des corps noirs ou gris ;
- on manque de données précises concernant les caractéristiques de rayonnement comme les facteurs d'émission des divers corps (réfractaires - métaux) aux différentes températures et aux diverses longueurs d'onde ; les corps partiellement transparents (gaz, flammes) sont encore plus mal connus.

Comme pour les problèmes de conduction, l'utilisation de certains logiciels permet de lever les principales difficultés de calcul ; beaucoup plus grave est le manque de données physiques dû au caractère particulièrement délicat et peu reproductible des mesures de facteurs d'émission. En conséquence, il est rare que l'on fasse appel à des formulations mathématiques très compliquées dans les problèmes pratiques de rayonnement car la précision que l'on peut en espérer est illusoire : on se contente généralement de l'hypothèse selon laquelle les corps opaques sont *tous gris* et l'on applique des formules simplifiées du genre de celles que nous avons rappelées, quitte à schématiser grossièrement la géométrie des systèmes en présence.